

## 2.4 Κανονική κατανομή και εφαρμογές

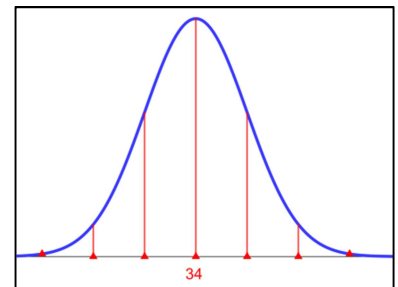
1. Υποθέτουμε ότι η διάρκεια της ανθρώπινης κήσης, σε ημέρες, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 266 και τυπική απόκλιση 16. Θεωρούμε ένα μεγάλο δείγμα κήσεων.

α) Να υπολογίσετε προσεγγιστικά το ποσοστό εκείνων που θα διαρκέσουν:

- i. το πολύ 266 ημέρες,
- ii. τουλάχιστον 282 ημέρες,
- iii. περισσότερο από 298 ή λιγότερο από 234 ημέρες.

β) Να γράψετε ένα διάστημα στο οποίο ανήκει η διάρκεια σε ημέρες του 95% των κήσεων.

2. Η Χριστίνα κάθε απόγευμα περπατάει 3 χιλιόμετρα. Θεωρούμε ότι ο χρόνος, σε min (λεπτά), στον οποίο περπατάει τα 3 χιλιόμετρα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 34$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 1$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

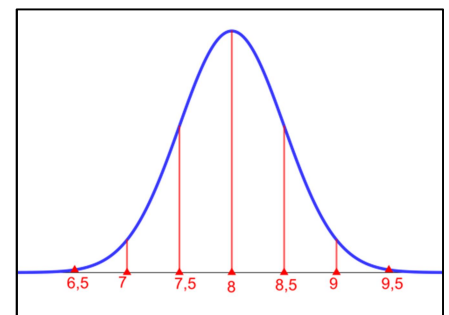


α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς  $\mu - \sigma$ ,  $\mu + \sigma$ ,  $\mu - 2\sigma$  και  $\mu + 2\sigma$ .

β) Επιλέγουμε τυχαία μια διαδρομή 3 χιλιομέτρων της Χριστίνας. Να υπολογίσετε την πιθανότητα, ο χρόνος της για αυτή τη διαδρομή:

- i. να ήταν μεγαλύτερος από 34 min,
- ii. να ανήκει στο διάστημα (33,35),
- iii. να ανήκει στο διάστημα (32,36).

3. Η κατανάλωση καυσίμου σε λίτρα, ανά 100 χιλιόμετρα ενός συγκεκριμένου οχήματος, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 8$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 0,5$ , όπως φαίνεται στο σχήμα (στον οριζόντιο άξονα είναι η κατανάλωση καυσίμου, σε λίτρα).



α) Να υπολογίσετε τις τιμές των  $\mu + 2\sigma$  και  $\mu - 2\sigma$ .

β) Να γράψετε τα διαστήματα  $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$  και  $(\mu, \mu + 2\sigma)$  με αριθμούς.

γ) Επιλέγουμε τυχαία μια διαδρομή 100 χιλιομέτρων του οχήματος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα καθενός από τα παρακάτω ενδεχόμενα για την κατανάλωση του οχήματος σε αυτή τη διαδρομή:

«Η κατανάλωση είναι μεγαλύτερη από 8 λίτρα.»

«Η κατανάλωση ανήκει στο διάστημα (7,9).»

«Η κατανάλωση ανήκει στο διάστημα (8,9).»

4. Η ημερήσια ζήτηση κρέατος, σε κιλά, στην Κεντρική Αγορά Αθηνών (Κ.Α.Α), υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 300$ . Γνωρίζουμε ακόμη ότι η πιθανότητα να ζητηθούν μία τυχαία μέρα έως 5.000 κιλά κρέας είναι 0,5.

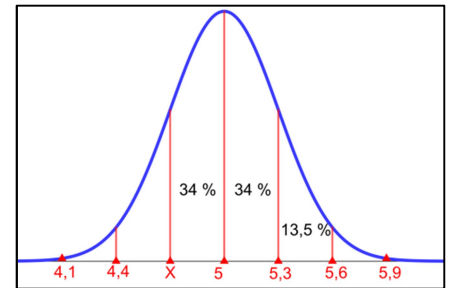
α) Να δικαιολογήσετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι  $\mu = 5.000$ .

β) Αν κάποια μέρα η Κ.Α.Α εφοδιαστεί με 5.300 κιλά κρέας τότε ποια είναι η πιθανότητα να πουληθεί όλη αυτή η ποσότητα αυτή τη μέρα;

γ) Ποια ποσότητα κρέατος πρέπει να εφοδιαστεί η Κ.Α.Α σε κάποια μέρα έτσι ώστε με πιθανότητα 0,9985 η ποσότητα αυτή να είναι επαρκής για να εξυπηρετήσει την ημερήσια ζήτηση;

5. Υποθέτουμε ότι η τιμή, σε ευρώ ανά λίτρο, του ελαιόλαδου στις επιχειρήσεις μιας ευρωπαϊκής χώρας Α ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 5$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου σε τυχαία επιχείρηση της χώρας Α να είναι στο διάστημα  $(5, 5,6)$  είναι 0,475 περίπου.



α) Με  $T$  συμβολίζουμε την τιμή του ελαιόλαδου, μιας τυχαίας επιχείρησης στην χώρα Α, σε ευρώ ανά λίτρο.

Να υπολογίσετε προσεγγιστικά:

i. την πιθανότητα το  $T$  να είναι μεγαλύτερο του 5.

ii. την πιθανότητα να ισχύει  $T > 5,6$ .

iii. την τυπική απόκλιση  $\sigma$  της παραπάνω κανονικής κατανομής.

β) Δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου, στην τυχαία επιχείρηση της χώρας Α, να ανήκει στο διάστημα  $(X, 5)$  είναι 0,34. Να υπολογίσετε προσεγγιστικά την τιμή του  $X$ .

6. Τα βάρη των αβγών, σε γραμμάρια, που παράγονται σε μία φάρμα, ακολουθούν την κανονική κατανομή. Τα αβγά πωλούνται σε τέσσερα μεγέθη:

- μικρό μέγεθος: με βάρος μικρότερο από 53 γραμμάρια,
- μεσαίο μέγεθος: με βάρος από 53 έως 63 γραμμάρια,
- μεγάλο μέγεθος: με βάρος από 63 έως 73 γραμμάρια,
- πολύ μεγάλο μέγεθος: με βάρος μεγαλύτερο από 73 γραμμάρια.

Έχει παρατηρηθεί, ότι μικρού μεγέθους είναι το 2,5% των αβγών και πολύ μεγάλου μεγέθους είναι επίσης το 2,5% των αβγών.

α) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι 63 και η τυπική απόκλιση 5.

β) Να βρείτε τα ποσοστά των αβγών που αναμένονται, σε καθένα από τα τέσσερα μεγέθη.

γ) Να συγκρίνετε το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια με το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.

7. Μια εταιρεία επεξεργασίας ρυζιού χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει χύμα ρύζι σε σακούλες ετικέτας 1.000 γραμμαρίων. Η ποσότητα γέμισης, σε γραμμάρια, που διανέμεται από το μηχάνημα σε κάθε σακούλα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 1.010 και τυπική απόκλιση 10 .

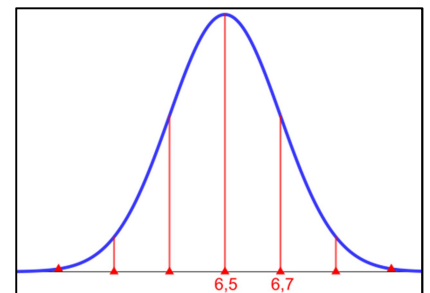
α) Παίρνουμε ένα μεγάλο δείγμα των παραπάνω συσκευασιών. Να εκτιμήσετε το ποσοστό των συσκευασιών του δείγματος με βάρος ρυζιού:

- i. μικρότερο από 1.000 γραμμάρια ,                      ii. μεταξύ 990 και 1.010 γραμμαρίων.

β) Στην εταιρεία θα επιβληθεί πρόστιμο, αν περισσότερο από το 2,5% των συσκευασιών έχει βάρος ρυζιού μικρότερο από 1.000 γραμμάρια η καθεμία. Ωστόσο το αυτόματο μηχάνημα έχει τη δυνατότητα να ρυθμίσει τη μέση τιμή της ποσότητας γέμισης που διανέμει στις σακούλες. Ποια νέα μέση τιμή θα πρέπει να επιλέξουν στην εταιρεία (διατηρώντας την τυπική απόκλιση 10) ώστε να μην τους επιβληθεί πρόστιμο;

8. Ο Κώστας βαδίζει με γρήγορο ρυθμό και η ταχύτητά του, σε χιλιόμετρα ανά ώρα, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 6,5$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η πιθανότητα, σε μια τυχαία διαδρομή η ταχύτητά του να είναι μεταξύ 6,5 και 6,7 χιλιομέτρων την ώρα είναι 0,34 περίπου.



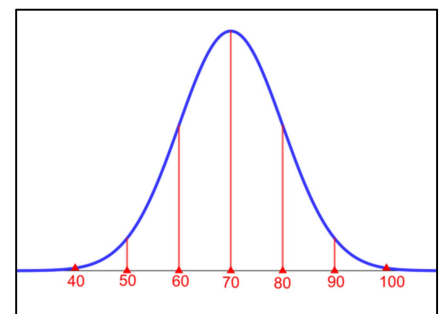
α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση  $\sigma$  της παραπάνω κανονικής κατανομής.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα, σε μια τυχαία διαδρομή η ταχύτητα του Κώστα να είναι:

- i. μικρότερη από 6,5 χιλιόμετρα την ώρα ,    ii. μικρότερη από 6,1 χιλιόμετρα την ώρα .

γ) Ο Κώστας άλλαξε τον τρόπο περπατήματός του. Η ταχύτητά του, σε χιλιόμετρα την ώρα ακολουθεί και πάλι την κανονική κατανομή, αλλά με  $\mu = 6,3$  και  $\sigma$  διαφορετική από την προηγούμενη. Η πιθανότητα η ταχύτητά του, σε μια τυχαία διαδρομή, να είναι μεταξύ 6,3 και 6,6 χιλιομέτρων την ώρα είναι ίση με 0,34 περίπου. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η ταχύτητά του να είναι μικρότερη από 6 χιλιόμετρα την ώρα.

9. Υποθέτουμε ότι το βάρος, σε κιλά, των μαθητών λυκείου στην Ελλάδα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 70$  (όπως στο σχήμα) και το 99,7% περίπου των μαθητών έχει βάρος που ανήκει στο διάστημα (40,100) .



α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση  $\sigma$  της κατανομής.

β) Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή λυκείου από όλο τον πληθυσμό των μαθητών λυκείου, στην Ελλάδα.

i. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα (60,80) .»

ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα (80,90) .»

**10.** Για την εισαγωγή σε μία σχολή, μία γυναίκα ή ένας άνδρας είναι επιλέξιμοι αν το ύψος τους σε cm, είναι τουλάχιστον 170 . Η κατανομή του ύψους των γυναικών είναι κανονική με μέση τιμή 163 και τυπική απόκλιση 7 και η κατανομή του ύψους των ανδρών είναι κανονική με μέση τιμή 170. Επιλέγουμε τυχαία μία γυναίκα και έναν άνδρα.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i.** η πιθανότητα ώστε μία γυναίκα να είναι επιλέξιμη, είναι 0,16 .

**ii.** η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος, είναι 0,5 .

**β)** Αν για τους άνδρες παραμείνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους στο 170 , πόσο θα πρέπει να γίνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους για τις γυναίκες, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα.