

1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες

1. Ένα τμήμα της Α΄ Λυκείου έχει εβδομαδιαίο πρόγραμμα μαθημάτων που αποτελείται από επτάωρα στις 5 εργάσιμες μέρες της εβδομάδας.
 - α) Αν πρόκειται να επιλέξουμε μια μέρα μιας συγκεκριμένης εβδομάδας και μια διδακτική ώρα για να γίνει η συνέλευση του τμήματος, πόσες είναι οι διαφορετικές δυνατές επιλογές;
 - β) Αν επιλέξουμε στην τύχη μια διδακτική ώρα για να γίνει η συνέλευση του τμήματος ποια είναι η πιθανότητα η συνέλευση να γίνει μια έβδομη διδακτική ώρα της συγκεκριμένης εβδομάδας;
2. Ο διευθυντής του σχολείου έχει κανονίσει συνάντηση με τα 5-μελή συμβούλια των μαθητικών κοινοτήτων στη βιβλιοθήκη του σχολείου. Στη βιβλιοθήκη υπάρχουν 5 καρέκλες η μία δίπλα στην άλλη, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές. Για να μη ρωτάει κάθε φορά ποιος από τους μαθητές έχει εκλεγεί πρόεδρος, ζήτησε να κάθεται στην πρώτη από αριστερά καρέκλα ο πρόεδρος και στις υπόλοιπες οι άλλοι μαθητές του 5-μελούς συμβουλίου.
 - α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στη συνάντηση με το διευθυντή;
 - β) Να βρείτε την πιθανότητα η τοποθέτηση του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στις πέντε καρέκλες να είναι: «ο πρόεδρος στην πρώτη καρέκλα, τα δύο άλλα μέλη του προεδρείου (γραμματέας – ταμίας) στις δύο επόμενες από αριστερά καρέκλες, και στη συνέχεια στις δύο επόμενες θέσεις τα δύο μέλη του μαθητικού συμβουλίου».
3. Ο διευθυντής του σχολείου έχει κανονίσει συνάντηση με τα 5-μελή συμβούλια των μαθητικών κοινοτήτων στη βιβλιοθήκη του σχολείου. Στη βιβλιοθήκη υπάρχουν 6 καρέκλες η μία δίπλα στην άλλη στις οποίες θα καθίσουν οι 5 μαθητές του συμβουλίου.
 - α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στη συνάντηση με το διευθυντή;
 - β) Να βρείτε την πιθανότητα στη συνάντηση του 5-μελούς με το διευθυντή ο πρόεδρος και ο γραμματέας να καθίσουν στις δύο ακραίες καρέκλες.
4. Ο Πέτρος έχει στην τσέπη του 5 διαφορετικά κέρματα: 3 κέρματα αξίας 1 ευρώ το καθένα, από την Ελλάδα, την Αυστρία και την Ιταλία και 2 κέρματα αξίας 2 ευρώ το καθένα, από την Ελλάδα και την Αυστρία.



Ο Πέτρος βγάζει τυχαία ένα κέρμα, το καταγράφει και το ξαναβάζει στην τσέπη του. Στη συνέχεια βγάζει τυχαία ένα δεύτερο κέρμα από την τσέπη του και το καταγράφει.

- α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 25 διαφορετικοί τρόποι που μπορεί ο Πέτρος να βγάλει τα δύο κέρματα από την τσέπη του.
- β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
 - i. A: «το πρώτο κέρμα έχει αξία 1 ευρώ και το δεύτερο έχει αξία 2 ευρώ»,
 - ii. B: «τα δύο κέρματα έχουν διαφορετική αξία»,

- iii. Γ: «τα δύο κέρματα έχουν την ίδια αξία».
5. Σ' ένα δείγμα 20 φορολογούμενων πολιτών, οι 4 έχουν ελεγχθεί κατά το παρελθόν, από την Ανεξάρτητη Αρχή Δημοσίων Εσόδων (ΑΑΔΕ). Το τρέχον έτος, από το παραπάνω δείγμα των 20 φορολογουμένων, η ΑΑΔΕ επιλέγει τυχαία δύο φορολογούμενους, για έλεγχο.
- α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 20 φορολογουμένων ανά 2, είναι 190 .
- β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, για τους δύο, τυχαία επιλεγμένους φορολογούμενους από την ΑΑΔΕ:
- i. Α: «και οι δύο φορολογούμενοι έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν»,
- ii. Β: «και οι δύο φορολογούμενοι δεν έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν»,
- iii. Γ: «μόνο ένας από τους δύο φορολογούμενους, έχει ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν».
6. Ένα κουτί περιέχει 2 κόκκινες γραβάτες και 3 πράσινες γραβάτες, από τις οποίες ο Γιώργος για κάθε μέρα από τις επόμενες πέντε μέρες, θα παίρνει τυχαία μία γραβάτα να φορέσει.
- α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω , όπου το αποτέλεσμα ΠΚΚΠΠ για παράδειγμα, σημαίνει ότι την πρώτη, την τέταρτη και την πέμπτη μέρα ο Γιώργος θα φορέσει πράσινη γραβάτα, ενώ τη δεύτερη και την τρίτη μέρα θα φορέσει κόκκινη γραβάτα.
- β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, ο Γιώργος:
- i. να φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα,
- ii. να μη φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα,
- iii. να φορέσει κάθε μέρα, διαφορετικό χρώμα γραβάτας από την προηγούμενη μέρα.
7. Ο σύλλογος γονέων και κηδεμόνων ενός σχολείου διοργανώνει λαχειοφόρο αγορά, με σκοπό τα έσοδα των λαχνών να διατεθούν για την αγορά εξοπλισμού του σχολείου. Οι αριθμοί των λαχνών είναι όλοι οι τετραψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 και 6.
- α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των λαχνών είναι 1296.
- β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
- i. να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα ίδια ψηφία,
- ii. να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα διαφορετικά ψηφία.
8. Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη τριών συνηθισμένων ζαριών» με δειγματικό χώρο όλες τις διατεταγμένες τριάδες που σχηματίζονται με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και 6 .
- α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 216 .
- β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων Α , Β και Γ :
- i. Α: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις ίσοι αριθμοί»,
- ii. Β: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί»,
- iii. Γ: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τουλάχιστον δύο ίδιοι αριθμοί».
9. Στον τελικό των 100 μέτρων ανδρών σε μια αθλητική διοργάνωση, προκρίθηκαν 8 αθλητές και θα διεκδικήσουν τα τρία μετάλλια: χρυσό, αργυρό και χάλκινο. Υποθέτουμε ότι κάθε αθλητής είναι εξίσου πιθανό να τερματίσει σε μία οποιαδήποτε θέση από την 1η έως την 8η .
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. η κατάταξη των 8 αθλητών μπορεί να προκύψει με 40.320 τρόπους,
- ii. η τριάδα των νικητών μπορεί να προκύψει με 336 τρόπους.

β) Από τους 8 αθλητές που θα πάρουν μέρος στον τελικό, ακριβώς 2 είναι Ευρωπαίοι.

i. Πόσες είναι οι δυνατές τριάδες που αποτελούνται από μη Ευρωπαίους αθλητές;

ii. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής;

- 10.** Η Μαρία έχει έναν προσωπικό κωδικό πρόσβασης για το ηλεκτρονικό της ταχυδρομείο, τον οποίο επέλεξε τυχαία. Ο κωδικός αποτελείται από τέσσερις μονοψήφιους αριθμούς (τέσσερα ψηφία), σε τέσσερις αντίστοιχες θέσεις όπως παρακάτω:

— — — —

Η Μαρία δε θυμάται το τελευταίο ψηφίο του προσωπικού κωδικού της.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να πληκτρολογήσει σωστά τον προσωπικό της κωδικό, επιλέγοντας τυχαία το τελευταίο ψηφίο;

β) Επειδή δεν πληκτρολόγησε σωστά τον κωδικό της, αποφάσισε να τον αλλάξει. Ο νέος κωδικός θα έχει επίσης τέσσερα ψηφία σε τέσσερις θέσεις. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 10.000 διαφορετικοί κωδικοί που μπορεί να δημιουργήσει η Μαρία.

γ) Για να αλλάξει τον κωδικό της επέλεξε τυχαία τον αριθμό κάθε θέσης. Ποια είναι η πιθανότητα στον προσωπικό κωδικό της να μην επαναλαμβάνεται κάποιος από τους αριθμούς;

- 11.** Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Για παράδειγμα, ένα αποτέλεσμα του παραπάνω πειράματος θα μπορούσε να είναι της μορφής 34, που σημαίνει ότι η ένδειξη της 1ης ρίψης είναι 3 και της 2ης είναι 4.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Το γινόμενο των 2 ενδείξεων να είναι 6»

B: «Η ένδειξη στη 2η ρίψη είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη στην 1η ρίψη»

Γ: «Το άθροισμα των 2 ενδείξεων να είναι 5»

α) i. Να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο για το παραπάνω πείραμα τύχης.

ii. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα A, B, Γ.

iii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup \Gamma$ και $B - \Gamma$.

β) Μετά τη 2η ρίψη, κάνουμε και 3η ρίψη με το ίδιο ζάρι.

i. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα στις 3 ρίψεις του ζαριού;

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου, να έχουμε την ίδια ένδειξη και στις 3 ρίψεις.

- 12.** Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή έχει 13 φύλλα με τις παρακάτω ενδείξεις:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, βαλές (J), ντάμα (Q), ρήγας (K) και άσσος (A).

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4 είναι 270.725.

β) Από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα επιλέγουμε τυχαία τέσσερα φύλλα. Να βρείτε τις πιθανότητες να πάρουμε:

i. τέσσερα 10 (δεκάρια),

ii. τέσσερα φύλλα με την ίδια ένδειξη.