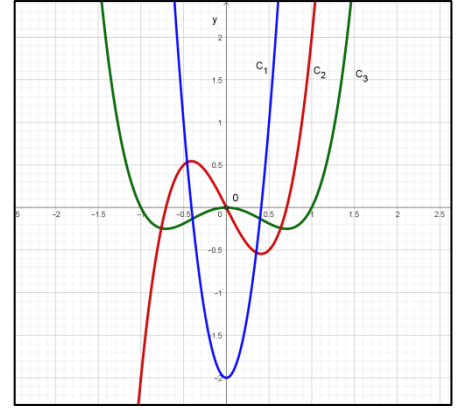


### 3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα

1. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  τριών συναρτήσεων  $f$ ,  $f'$  και  $F$ , όπου  $F$  μία αρχική της  $f$  στο  $\mathbb{R}$ . Δίνεται επίσης ότι οι  $C_2$  και  $C_3$  διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Με δεδομένο ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = 4x^3 - 2x$  και η γραφική της παράσταση είναι η  $C_2$ ,



- α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος, τη συνάρτηση  $F$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,  
 β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση  $C_3$  αντιστοιχεί στην συνάρτηση  $F$ ,  
 γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων  $f'$  και  $F$ .
2. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το  $f(2) = -32$ . Οι γραφικές παραστάσεις της  $f$  και της παραγώγου  $f'$  τέμνονται στο σημείο  $A(-2, 0)$ .
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της  $C_f$  στα σημεία με τετμημένες:
- $x_1 = 2$ ,
  - $x_2 = -2$ .
- β) Δίνεται επιπλέον ότι η  $f'$  είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού και η γραφική παράσταση της  $f'$  διέρχεται από το σημείο  $B(0, -12)$ . Να αποδείξετε ότι:
- $f'(x) = 3x^2 - 12$ ,
  - $f(x) = x^3 - 12x - 16$ ,
  - η εξίσωση  $f(x) = -20$  έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.
3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ ,  $x > -1$  και έστω  $F$  αρχική της  $f$  με  $F(1) = \ln 2$ .
- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > -1$  ισχύει  $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$  και να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.  
 β) Να αποδείξετε ότι η  $F$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .  
 γ) **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $F$  στο  $x_0 = 1$ .  
**ii.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\frac{2F(x)-1}{x} \geq \ln 4 - 1$ .