

## 2.8 Κυρτότητα – Σημεία καμψής συνάρτησης

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \ln(1+x^2)$ .

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμψής της.

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης  $f$  και να λύσετε τις εξισώσεις:  $f'(x) = 0$  και  $f''(x) = 0$ .

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

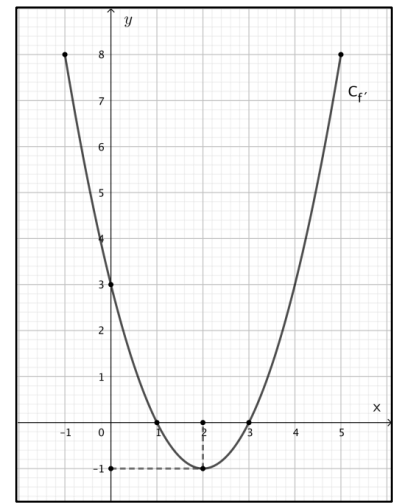
γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμψής.

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας πολυωνυμικής συνάρτησης  $f$  τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα  $[-1,5]$ .

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου  $f'$  είναι το σημείο  $A(2, -1)$ , με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κοίλη στο  $[-1,2]$  και κυρτή στο  $[2,5]$ .

β) Ποια είναι η κλίση της  $f$  στο  $x_0 = 2$ ;

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι  $3f(2) - 1 = 0$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 2$ .

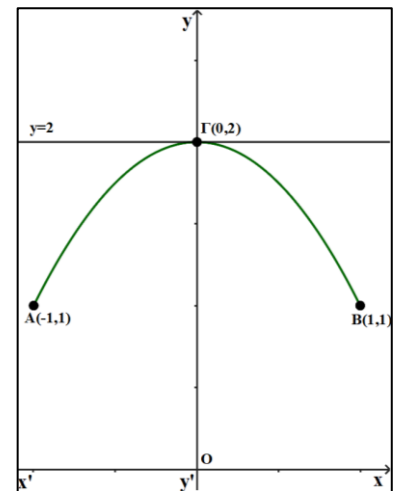


4. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  και η ευθεία  $y=2$ . Αν η γραφική παράσταση της  $f'$  διέρχεται από τα σημεία  $A(-1,1)$ ,  $B(1,1)$  και  $\Gamma(0,2)$  τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει:  $1 \leq f'(x) \leq 2$ , για κάθε  $x \in [-1,1]$ .

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμψής.



5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

β) Έστω  $(\varepsilon)$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon)$ .

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της  $C_f$ , διαφορετικό από το  $A$ , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon)$ .

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{\eta\mu x} \right) = 0$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(0) = 0$ .

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  με  $f'(0) = 0$ .

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ , στο σημείο  $(0, g(0))$ .

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  δεν είναι κυρτή.

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x$ . Να αποδείξετε ότι

α) η  $f$  είναι κυρτή,

β) η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο  $x_0 \in \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$  το οποίο είναι μοναδικό,

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το  $\frac{1}{x_0} + x_0$ ,

δ) η εξίσωση  $f(x) = 2$  είναι αδύνατη.

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x > 0$ .

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι  $2022^{2023} > 2023^{2022}$ .

γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την  $f$  σε καθένα από τα διαστήματα  $[2021, 2022]$  και  $[2022, 2023]$  να αποδείξετε ότι  $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$ .

Δίνεται ότι  $e \approx 2,71$ .

9. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  και το σύνολο τιμών της  $f'$  είναι το  $\mathbb{R}$ .

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , η εξίσωση  $e^x + x = \alpha$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$ .

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , η συνάρτηση  $g(x) = \alpha x - f(x)$  με  $x \in \mathbb{R}$ , έχει μέγιστη τιμή την  $\rho f'(\rho) - f(\rho)$ .

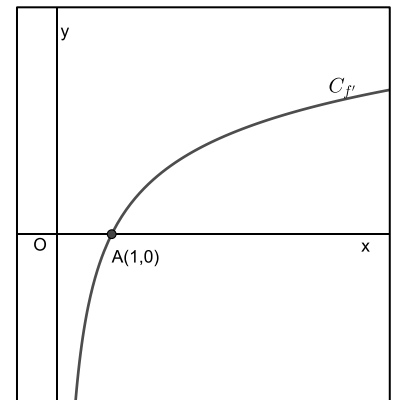
10. Δίνεται συνάρτηση  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι συνεχής στο  $[0,2]$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0,2)$  και ισχύουν  $f(1)=1$ ,  $f'(1)=0$ ,  $f(0)=f(2)$  και  $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in (0,2)$

α) Να αποδείξετε ότι: **i.**  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (0,2)$ , **ii.**  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0,2)$ .

β) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

11. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο  $(0, +\infty)$  η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $(0, +\infty)$ . Δίνεται επίσης ότι η  $f'$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο  $(0, +\infty)$  με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ .



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1ον: «Η γραφική παράσταση της  $f$  δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2ον: «Υπάρχει μοναδικό  $\kappa \in (0, +\infty)$  τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $M(\kappa, f(\kappa))$  να είναι ίσος με 2».

Ποιοί από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της  $f$  στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας.

12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x$ ,  $x > 0$  όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Αν ισχύει  $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$ , να αποδείξετε ότι:

α) η  $f$  είναι κυρτή.

β) υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in (1, e)$  με  $f'(x_0) = 0$ .

γ) για την  $f'$  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο  $[1, e]$ .

δ) η  $f$  παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο  $x_0$  που είναι το  $e^{x_0}(1 - x_0) + 1 - \ln x_0$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $[-2,2]$  η οποία είναι συνεχής στο  $[-2,2]$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(-2,2)$  και ισχύει  $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$ , για κάθε  $x \in [-2,2]$ .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει σημεία καμπής.

β) Αν  $f(0) = 3$ ,

i. Να αποδείξετε ότι  $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$ , για κάθε  $x \in [-2, 2]$  και κατόπιν ότι  $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ ,  $x \in [-2, 2]$ .

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της  $f$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \sin x$ .

14. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - \ln x - 3$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$ .

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο  $x_0 \in (0, 1)$  με  $f(x_0) < 0$ .

γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$ .