

## 2.5 Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού

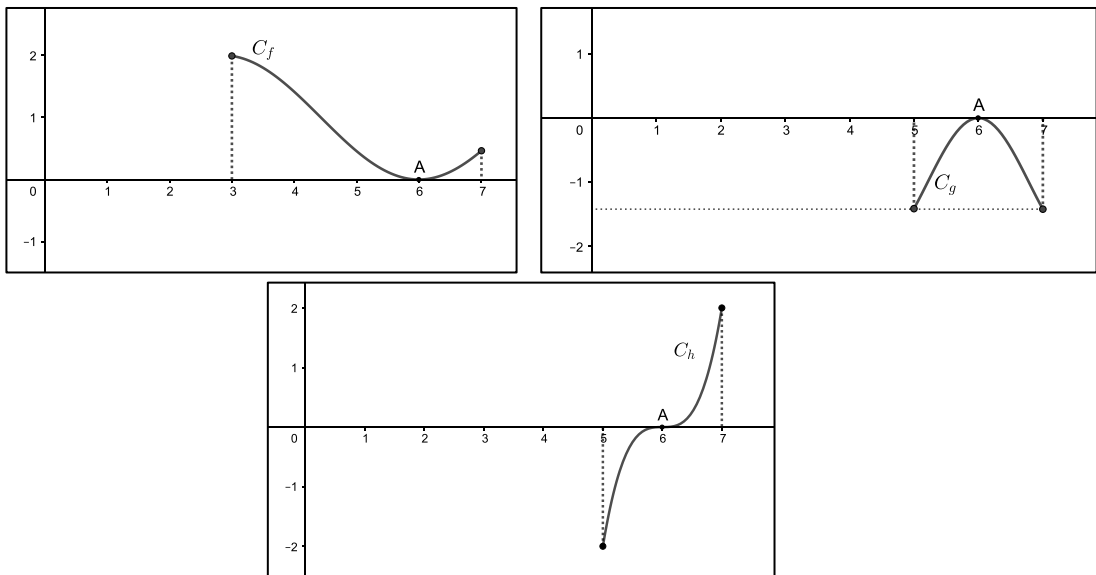
1. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1 & , x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1 & , x > 0 \end{cases}$ .

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $0$ .

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$ .

γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα  $[-1, 1]$  και να βρείτε ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (-1, 1)$  για το οποίο ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

2. Στα σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των  $f$ ,  $g$  και  $h$  οι οποίες εφάπτονται του άξονα  $x'x$  στο σημείο του  $A(6, 0)$ .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $h$ .

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους,

ii. υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της.

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$ ,  $x \in [1, 2]$ .

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[1, 2]$ .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9 = 0$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(1, 2)$ .

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , x \in [-1, 2] \\ x - 1 & , x \in (2, 5] \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση  $x_0 = 2$ .

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $[-1, 5]$ .

5. Η συνάρτηση  $x(t) = (t - 2)(t - 1)^2$  (σε m), για κάθε χρονική στιγμή  $t$  (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού A, που κινήθηκε πάνω στον άξονα  $x'x$  στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό A είχε ταχύτητα μηδέν.

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό A κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά.

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα  $S$  που διήνυσε το κινητό A.

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού A, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή  $\frac{5}{3}$  sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του A ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το A στο διάστημα αυτό.