

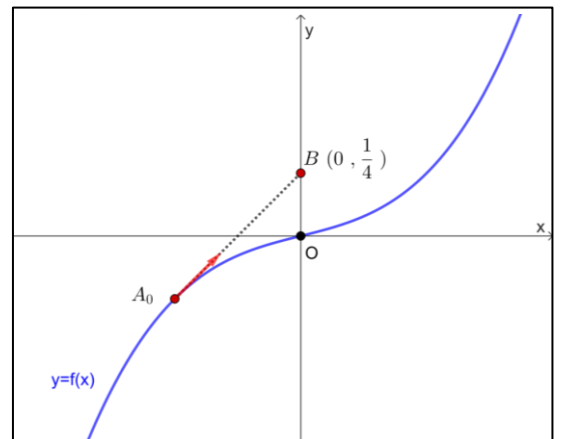
2.4 Ρυθμός μεταβολής

1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$, για την οποία ισχύει $f^2(x) + x^2 = 4$ για κάθε $x \in [-2, 2]$.
- α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f .
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f . Καθώς περνάει από το σημείο $B(-1, \sqrt{3})$, η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το B .

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση $y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3$.

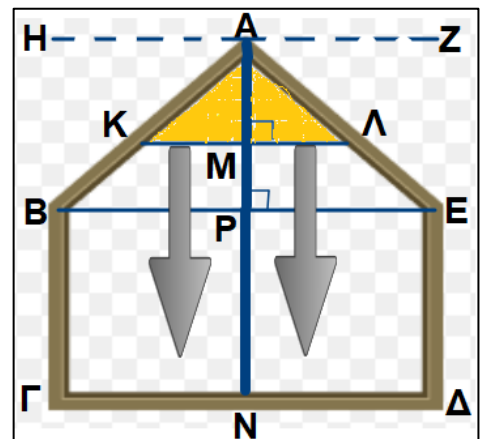
- β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Oxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 , που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0 , οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$.



- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A_0 .

- ii. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_0 , είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή t_0 .

3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $BΓΔΕ$ και το ισοσκελές τρίγωνο ABE . Είναι $AP = 0,8\text{ m}$, $BE = 1,6\text{ m}$, $AM = x\text{ m}$, $BΓ = 1\text{ m}$. Το ορατό κάτω μέρος $ΚΛ$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση HZ , με σταθερό ρυθμό, ώστε το M να διαγράφει το ευθύγραμμο



τιμήμα AN (με $AM \neq 0$). Αν $E = E(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό E , ισχύει:

$$E(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25} & , \text{ αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases} , \text{ σε } m^2 .$$

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ως προς x , όταν $x = \frac{4}{5} m$, είναι ίσος με

$$E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} m^2 / s .$$

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς τον χρόνο t , τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει

$$x = \frac{4}{5} m , \text{ αν δίνεται επιπλέον ότι } x'(t) = 0,08 m/s \text{ για κάθε } t \geq 0 .$$