2.2 – 2.3 Παράγωγος συνάρτηση – Κανόνες παραγώγισης

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ -x^2+1, & x>0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A\left(0, f\left(0\right)\right)$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+2x$, $x>0$ και $g(x)=e^{x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ **.**

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι «1 – 1».

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\eta\mu x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=f'(x)-\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $\varphi(0)<0$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=-2$ και $f'(0)=0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-x$ και $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(g\circ f)(0)$.

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$.

γ) Να βρείτε την παράγωγο της $g\circ f$ στο $x_0=0$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g\circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x<2 \\ \alpha x^2-4, & x\ge 2 \end{cases}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0=2$, δηλαδή τα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

γ) Αν $\alpha=2$, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f.

6. Έστω μια συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-x+1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1,f(-1))$, έχει εξίσωση $y=g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$.

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f\circ g$ και $g\circ f$,

ii. τις παραγώγους $(f\circ g)'(2)$ και $(g\circ f)'(-1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{f\circ g}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_1=2$ και η εφαπτομένη της $C_{g\circ f}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-1$, ταυτίζονται.