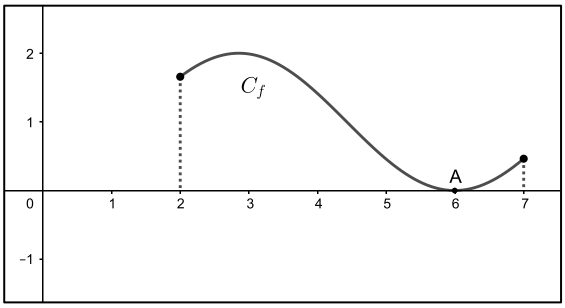
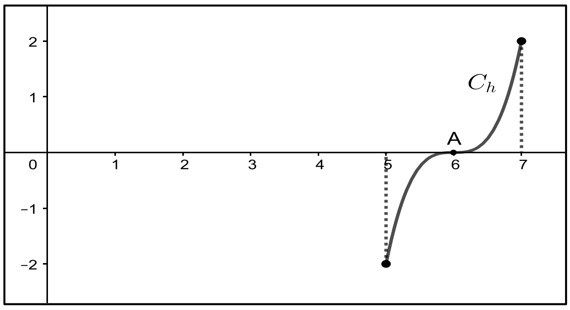
2.1 Η έννοια της παραγώγου

1. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h. Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.



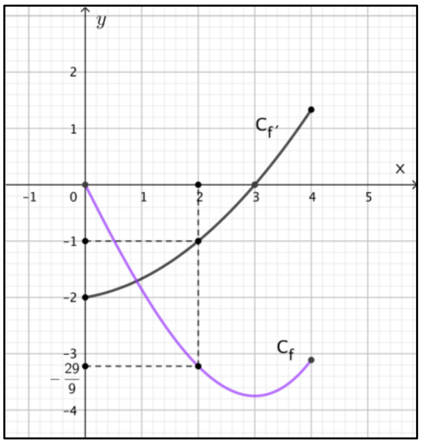


α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x\to 6} f(x)$ **ii.** $\lim_{x\to 6}\frac{1}{h(x)}$ **iii.** $\lim_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6}$

2. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$, και της παραγώγου της, f'.



α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x & , & x<0 \\ 1 & , & x=0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , & x>0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x=\frac{\pi}{2}$.

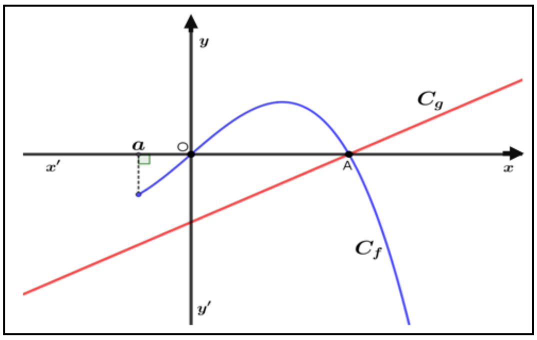
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+x, & x\le 0 \\ \eta\mu x, & x>0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 1$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

5. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γνωρίζουμε ότι οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$, η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A.



α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)}$.

β) Αν είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}$.

6. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$.

7. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$.