1.4 – 1.7 Όριο συνάρτησης, ιδιότητες ορίων, μη πεπερασμένο όριο, όριο στο άπειρο

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x)=x^2-x+1$ και $g(x)=\sqrt{4x-3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq\frac{3}{4}$.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.

γ) Αν $h(x)=|2x-1|$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=e^{3x+2}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $g\circ f$.

γ) Αν $g(f(x))=6x+4$, $x\in\mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(g\circ f)(x)-\eta\mu^2 x-4}{x}$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού της $f\cdot g$ **ii.** το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$

4. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

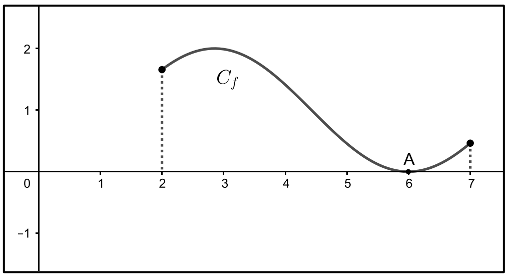
α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2)<f(x)$.

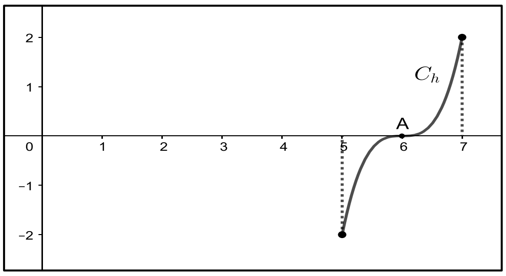
β) Αν ισχύει ότι $\alpha^2<\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[f(\alpha^2-\alpha)-f(0)\right]x\right)=-\infty$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x-1)=f(0)$.

1.8 Συνέχεια συνάρτησης

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f κα h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του Α(6,0).





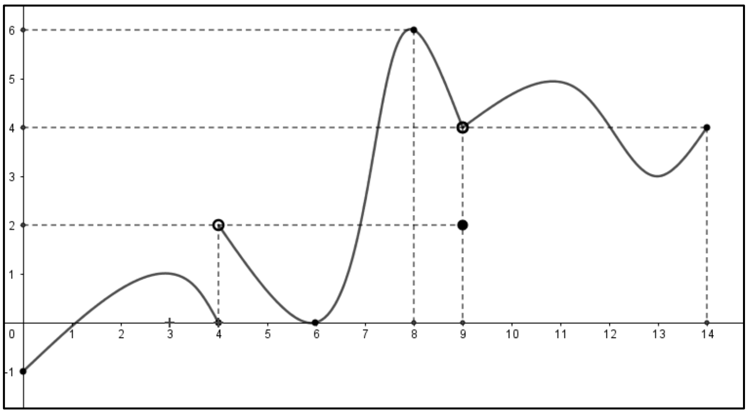
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h.

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους,

ii. παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to 14} f(x)$ v. $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2+16}-\frac{5}{2}\ln(8x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)>0$ και $f(1)<0$.

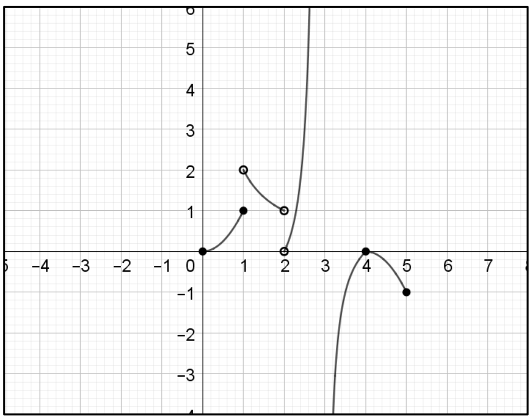
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x)-2x|\le(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1)=2$, **β)** $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$, **γ)** η f είναι συνεχής στο 1.

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f=[0,2)\cup(2,3)\cup(3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες (0,0) και (4,0). Επίσης, δίνεται ότι $f(1)=1$. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας,

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας,

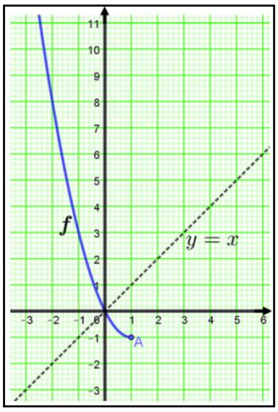
γ) να βρείτε τα όρια: **i.** $\lim\limits_{x\to4}f(x)$, **ii.** $\lim\limits_{x\to4}\frac{1}{f(x)}$.

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2-1$, $x\le1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\lim_{x\to 0} f(x)=\kappa$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x)\le ημ2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0}\frac{ημ2x}{x}=2$.

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$.

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

«$\left|f(x)\cdot\frac{εφx}{x}\right|=-f(x)\cdot\frac{εφx}{x}$ κοντά στο 0 »

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2023-\frac{ημx}{x}, & x\ne 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2022$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2022$.

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\ne 0$ ισχύει: $xf(x)+συνx=1-x^2ημ\frac{1}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-συνx}{x}=0$, **ii.** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi},+\infty\right)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x^3+2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=0$.

12. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, τέτοιες ώστε: $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$, για κάθε $x\in[0,\pi]$.

α) **i.** Να αποδείξετε ότι $|f(x)|=|\eta\mu x|$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Να βρείτε την συνάρτηση f.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.