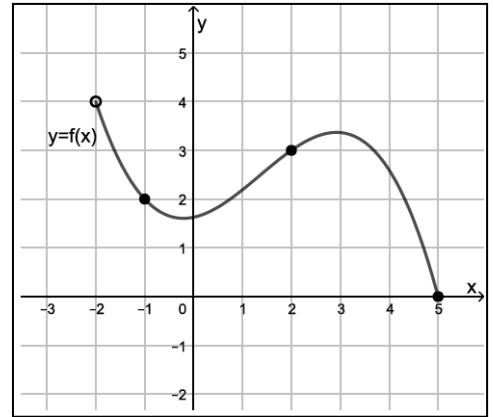


1.3 Μονότονες συναρτήσεις – Αντίστροφη συνάρτηση

1. Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε:



- α) πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f ,
 β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$, $f(5)$,
 γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν,
 δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 .

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Έστω $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$.

- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$, $x \geq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 β) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

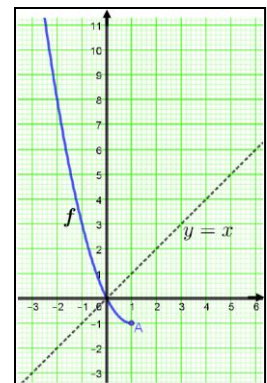
Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2$, $x \geq -1$.

- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 - 1$, $x \leq 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.
 β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . Στη συνέχεια να σχεδιάσετε στο σχήμα τη γραφική παράσταση της f^{-1} .



5. Έστω η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ και για ποιες τιμές βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το διάστημα $D_f = [0, 1]$.

β) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1 - 1».

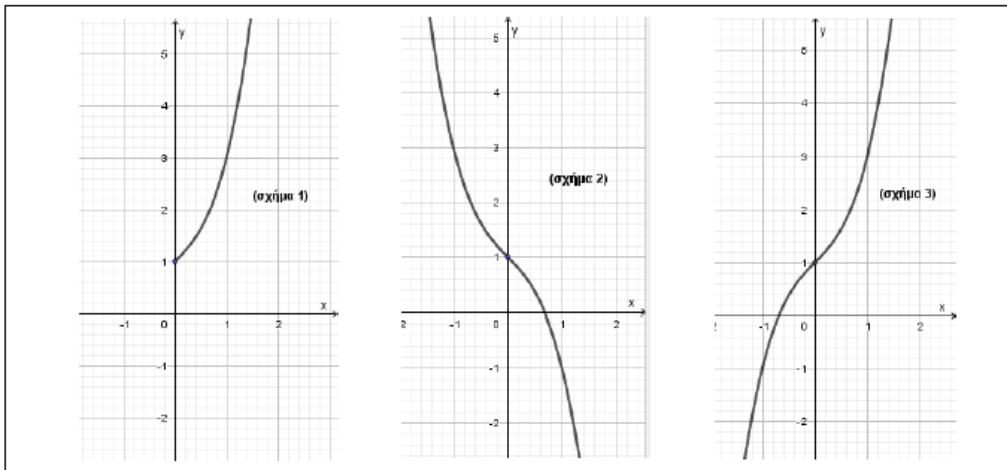
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0$, $x \in [0, 1]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



γ) i. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $|f|$.

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

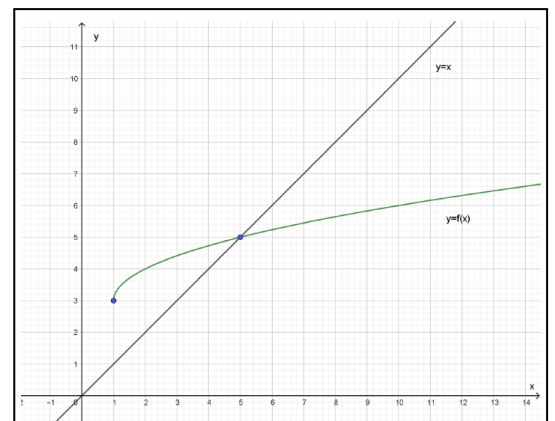
$$|x^3 + x + 1| = 2023$$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1 - 1».

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

γ) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας $x\hat{O}y$. Να σχεδιάσετε στο σχήμα τη γραφική παράσταση της f^{-1} και να



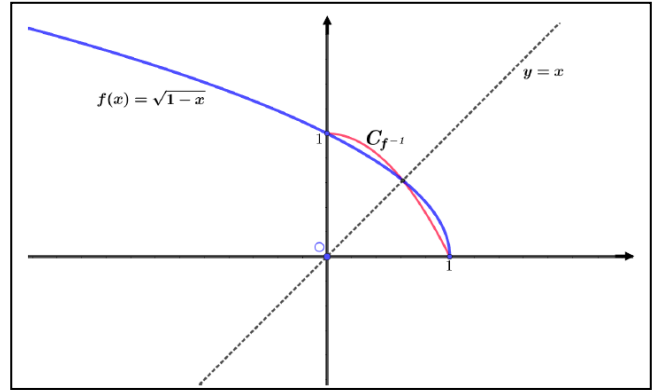
βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{1-x}$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1} . Να συμπληρώσετε στο σχήμα την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .



10. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο ισχύει ότι $f = g$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -x^3$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

12. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x) = x-2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h με $h(x) = |g(x)|$.

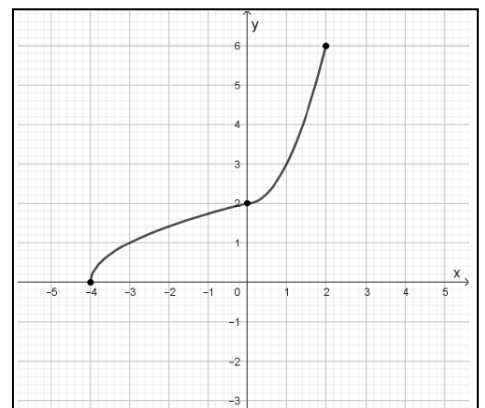
γ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h .

13. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$.

γ) Να χαράξετε στο σχήμα τη γραφική παράσταση της f .



14. Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[0, 2]$,

ii. ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f ,

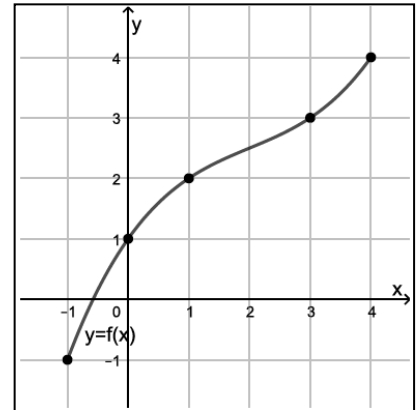
iii. οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

15. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f ,

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$,

γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .



16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(x - 2) + 5$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x - 1$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} της συνάρτησης g .

β) i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την αντιστροφή συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f .

18. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$ και τύπο

$f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$. Δίνεται, επίσης, η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$, σύνολο τιμών το

διάστημα $[0, +\infty)$ και τύπο $g(x) = \left(\frac{1 + 2x}{1 - x}\right)^2$. Αν η συνάρτηση f είναι «1-1»,

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f , δηλαδή ισχύει ότι $g = f^{-1}$,

- β)** να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,1)$,
- γ)** να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κοινά σημεία.
- 19.** Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(1+e^x)$ και $g(x) = 2\ln x$.
- α)** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β)** Να ορίσετε τη συνάρτηση $f+g$.
- γ)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f+g$ ως προς τη μονοτονία.
- 20.** Δίνονται οι συναρτήσεις $g:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2\ln x$ και $h:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \ln(1+x^2)$.
- α)** Να αποδείξετε ότι:
- i.** η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη,
- ii.** $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$ με $x \in \mathbb{R}$.
- β)** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$.
- 21.** Έστω $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.
- α)** Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f .
- β)** Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει ότι $f(\alpha \ln \alpha) \leq f(\ln \alpha)$.
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) = \ln 2$.
- δ)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (3 - \ln 2)x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.