

1.2 – 1.3 Η έννοια της παραγώγου – Παράγωγος συνάρτησης

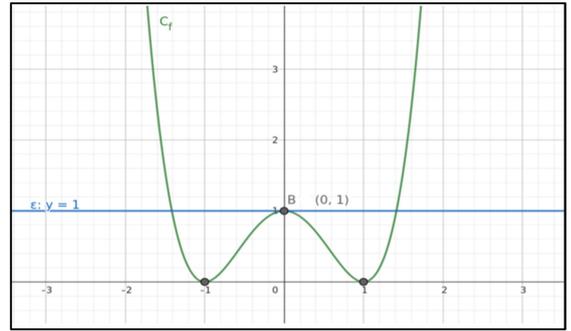
1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της \mathbb{R} .

α) Να βρείτε, με βάση το παραπάνω σχήμα, τη μονοτονία της συνάρτησης σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

β) Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=1$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $B(0,1)$, τότε:

i) Να βρείτε την $f(0)$ και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί $f'(0)=0$.



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + 2$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης,

β) την παράγωγο f' της συνάρτησης,

γ) την τιμή $f'(2)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 7x$ με $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(2, -6)$, τότε:

α) να δείξετε ότι $f'(x) = 4x - 7$,

β) να δείξετε ότι $\lambda = 1$,

γ) να δείξετε ότι $\beta = -8$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να βρείτε την $f''(x)$.

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = f(0) + f'(0) + f''(0)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι $f'(x) = -6x^2 + 2x$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, -1)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -8$,

γ) η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = -8x - 9$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 \cdot \frac{1}{x}$ με $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{5}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,5)$. Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = -5$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = -5x + 10$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(-1, \frac{2}{3}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 1$.

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = x + \frac{5}{3}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(9)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-2) + f(2)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x} - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-2)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \cdot \frac{1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f'(x) = \frac{3}{x^2}$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(-3)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2023$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $f'(-1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(-1) + f'(1) = 2$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, -1)$.

Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 0$,

γ) η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $y = -1$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 4x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Να αποδείξετε ότι:

β) $\lambda = 4$,

γ) η εξίσωση της ευθείας (ϵ) είναι $y = 4x - 3$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $f'(2)$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sqrt{x}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να δείξετε ότι $f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x > 0$.
- γ) Να υπολογίσετε το $f'(4)$.
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $x > 0$.
- α) Να βρείτε τον αριθμό α , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$.
Στη συνέχεια δίνεται ότι $\alpha = 4$.
- β) i) Να υπολογίσετε τον $f'(1)$.
- ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,4)$.
- γ) i) Να βρείτε τα σημεία τομής K , L της (ε) με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα.
- ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες $x'x$, $y'y$.
18. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι $f'(2) = -\frac{1}{2}$.
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = 2x - 3$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(2, g(2))$.
- γ) i) Να δείξετε ότι το σημείο $(2, g(2))$ ανήκει και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- ii) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο κοινό τους σημείο $(2,1)$, είναι κάθετες μεταξύ τους. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
- (δίνεται ότι: δύο ευθείες ε_1 , ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 , λ_2 αντίστοιχα, είναι κάθετες μεταξύ τους εάν ισχύει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 - 1$).
19. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^2 - 2x$, $x \in [0, +\infty)$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.
- α) Αν ισχύει $f'(1) = 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.
- β) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}$.
- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$.
- γ) Για $\alpha = 1$:
- i) να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$.

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$.

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

γ) Ο Γιάννης υπολόγισε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και βρήκε ότι σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135 μοιρών και επίσης ότι δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Συμφωνείτε με τον Γιάννη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.