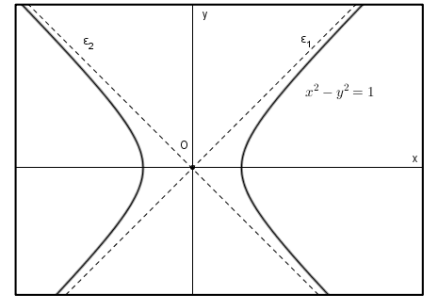


3.4 Η Υπερβολή

1. Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες (ε_1) και (ε_2) της υπερβολής ότι:



- α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου, αντίστοιχα.
β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

2. Η υπερβολή (C) έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

- β) Να βρείτε την εξίσωση της (C) .

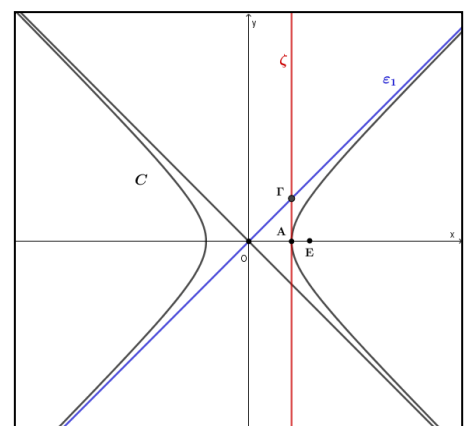
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

3. Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1$, $(C_2): y^2 - x^2 = 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της (C_1) είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0)$, $E_1'(-\sqrt{2}, 0)$.

- β) Αν E_2, E_2' οι εστίες της (C_2) τότε να αποδείξετε ότι το $E_1E_2E_1'E_2'$ είναι τετράγωνο.

4. Στο σχήμα φαίνονται η υπερβολή $(C): x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E , η εφαπτομένη της (ζ) στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία (ε_1) της υπερβολής.



- α) Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της υπερβολής.

- β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ζ) .

- ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.

5. Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

- α) Να βρείτε τις εστίες της (C) .

- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της (C) .

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C) και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

6. Η υπερβολή (C) έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της (C).

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της (C).

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της (C) στο σημείο της $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

7. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$.

8. Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση (C): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

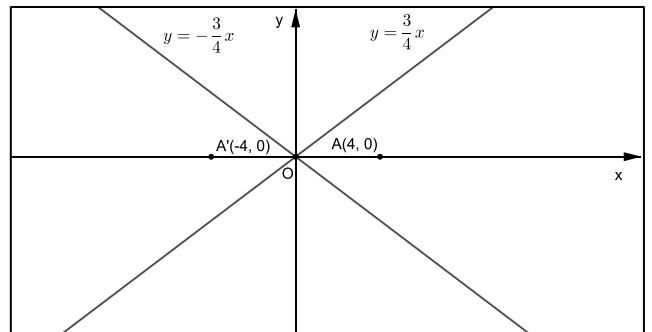
α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1,2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C).

9. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία

$A'(-4,0)$ και $A(4,0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες

$y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.



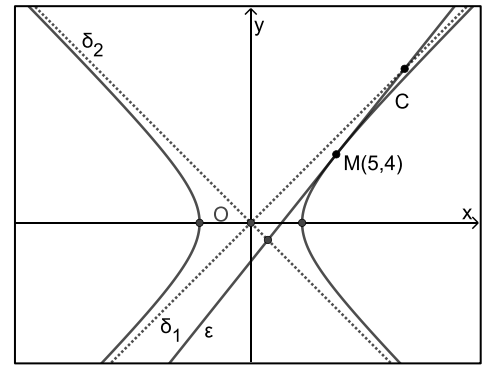
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$,

ii. οι εστίες της (C) είναι τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$.

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή (C).

10. Στο σχήμα η υπερβολή (C) έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες (δ_1) και (δ_2) είναι οι ασύμπτωτες της (C) και η (ϵ) είναι η εφαπτομένη της (C) στο σημείο της $M(5,4)$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι εξισώσεις των ασυμπτωτών είναι:

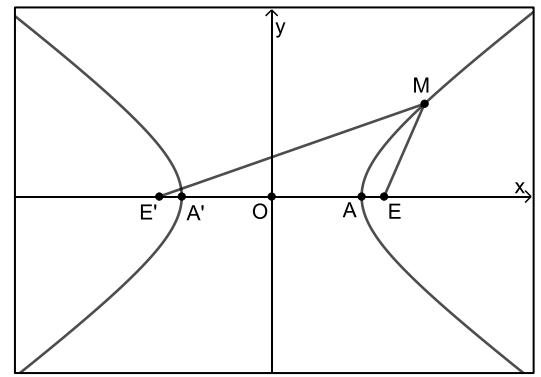
$$(\delta_1): y = x \text{ και } (\delta_2): y = -x,$$

ii. η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $(\epsilon): 5x - 4y = 9$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ϵ) και (δ_1) καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ϵ) και (δ_2) .

11. Η υπερβολή στο σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10,0)$ και $E(10,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8,0)$ και $A(8,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.



β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$.

ii. Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' .

12. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

α) i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής.

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής;

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

13. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

i. τις συντεταγμένες των εστιών της ,

ii. την εκκεντρότητά της ,

iii. τις εξισώσεις των ασυμπτωτων της υπερβολής .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της $A\left(\sqrt{5}, \frac{1}{2}\right)$.

14. Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση $x^2 - y^2 = 25$ (1).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E' .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ε_1) , (ε_2) της υπερβολής.

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ε_1) , (ε_2) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

15. Δίνεται η υπερβολή (C): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E .

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C).

16. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση της μορφής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, εστιακή απόσταση $EE' = 2\sqrt{7}$ και εκκεντρότητα

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$.

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A , A' της υπερβολής (C).

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων ευθειών της υπερβολής (C).

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτές της, τις εστίες της και τις κορυφές της.

17. Η υπερβολή (C) έχει εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της (C).

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας EME' .

δ) Να βρείτε το συνημίτονο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ασύμπτωτές της.

Δίνεται ότι $\sqrt{1681} = 41$.

18. Έστω υπερβολή (C) με κέντρο το $(0,0)$, εστίες τα σημεία $E(5,0)$, $E'(-5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A(4,0)$, $A'(-4,0)$.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής (C).

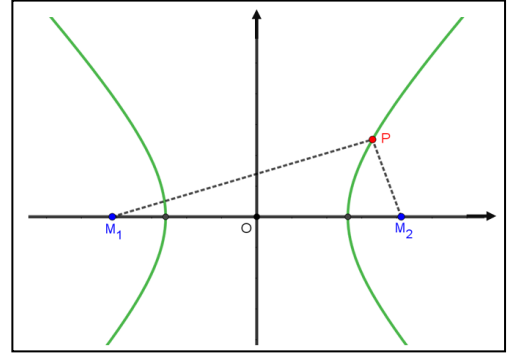
ii. την εξίσωση της υπερβολής (C).

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα, την υπερβολή (C), τις ασύμπτωτες της (C) και το ορθογώνιο βάσης της (C).

γ) Αν M τυχαίο σημείο της (C), να βρείτε την τιμή της παράστασης $(ME) - (ME')$.

δ) Αν $M(\sqrt{80}, 6)$ σημείο της (C), να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EME'}$.

19. Κατά τη διάρκεια μιας επιχείρησης εντοπισμού ενός αγνοούμενου σε μια αχανή δασώδη επίπεδη περιοχή, δύο παρατηρητές M_1 και M_2 βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Ο αγνοούμενος εκτοξεύει φωτοβολίδες που διαθέτει και οι δύο παρατηρητές σημειώνουν τις χρονικές στιγμές που ακούνε τον ήχο της εκτυρσοκρότησης του όπλου. Είναι γνωστό ότι ο παρατηρητής M_1 ακούει σε όλες τις εκρήξεις τον ήχο με διαφορά 4 sec αργότερα από τον παρατηρητή M_2 .



α) Αν ονομάσουμε P την θέση του αγνοούμενου, να αποδείξετε ότι $(PM_1) - (PM_2) = 1.360$ m.

Θεωρούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι 340 m/sec.

β) Να αποδείξετε ότι η θέση P του αγνοούμενου ανήκει σε έναν κλάδο υπερβολής με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 .

γ) Αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση (M_1M_2) είναι 1.378 m, να αποδείξετε ότι αυτή η υπερβολή έχει εξίσωση

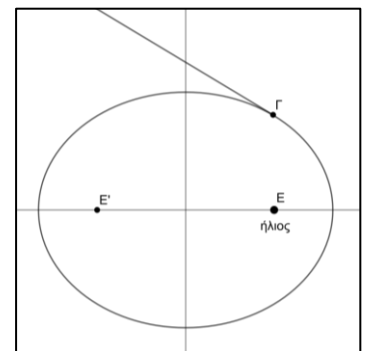
$$\frac{x^2}{680^2} - \frac{y^2}{111^2} = 1, \text{ θεωρώντας ως άξονα } x'x \text{ την ευθεία } M_1M_2 \text{ και κέντρο της υπερβολής την αρχή των αξόνων.}$$

$$\Deltaίνεται \text{ ότι } 37^2 = 1.369.$$

20. Πλανήτης κινείται πάνω σε επίπεδο, ελλειπτικά γύρω από τον ήλιο του. Στο καρτεσιανό επίπεδο ο ήλιος βρίσκεται στην εστία της έλλειψης $E(\gamma, 0)$, ενώ η άλλη εστία είναι στο $E'(-\gamma, 0)$. Η εκκεντρότητα της τροχιάς είναι 0,6 ενώ ο μεγάλος άξονας 10.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς.

β) Θεωρούμε ότι ο πλανήτης κινείται πάνω στην $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



i. Τη στιγμή που ο πλανήτης βρίσκεται στο σημείο $\Gamma\left(3, \frac{16}{5}\right)$ εκπέμπεται από αυτόν σήμα που κινείται κατά τη

διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς του προς τη μεριά του άξονα Oy. Να εξετάσετε αν αυτό το σήμα θα περάσει από το σημείο $\Delta(0, 5)$.

ii. Κομήτης κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη και πάνω στην καμπύλη $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ με $x > 0$. Ποια είναι τα σημεία συνάντησης των δύο τροχιών;

21. Έστω υπερβολή (C) με κέντρο το (0,0), εστίες πάνω στον άξονα $x'x$ της οποίας το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο.

α) Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της (C).

ii. την εκκεντρότητα της (C).

β) Αν η υπερβολή διέρχεται από το σημείο (2,0) και (ζ) τυχαία ευθεία παράλληλη σε κάποια εκ των ασύμπτωτων της (C) (που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές),

i. να δείξετε ότι η (ζ) έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την (C).

ii. είναι η ευθεία (ζ) εφαπτόμενη της (C); Αιτιολογείστε την απάντησή σας.