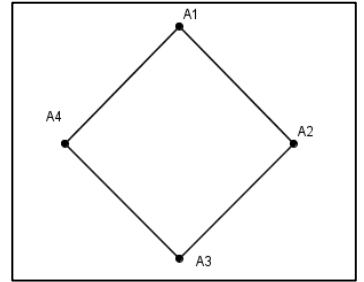


2.1 Εξίσωση ευθείας

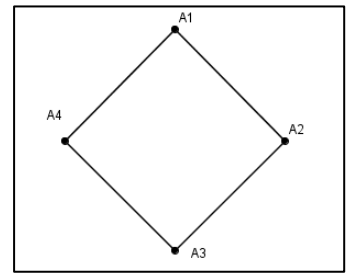
1. Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$.

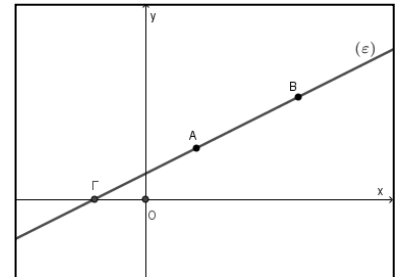
2. Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_3 + \lambda_4} = 2$.

3. Στο σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1), B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε) .



α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε) .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

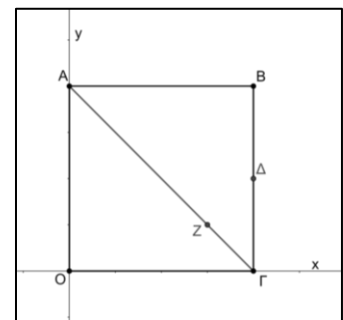
γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

4. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma O$ με κορυφές τα σημεία:

$$A(0,4), B(4,4), \Gamma(4,0), O(0,0)$$

Στην διαγώνιο $A\Gamma$ παίρνουμε σημείο Z , τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της $B\Gamma$.

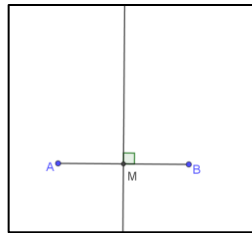
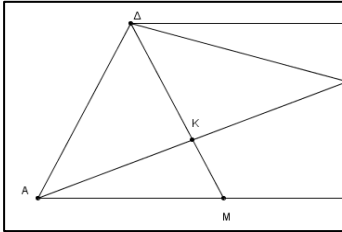


α) Να βρείτε:

- i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ ,
- ii. τις συντεταγμένες του σημείου Z .

β) Αν το σημείο Δ είναι το $(4,2)$ και το σημείο Z το $(3,1)$, να αποδείξετε ότι η ευθεία $Z\Delta$ είναι κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$.

5. Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ έχουν εξισώσεις $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + y + 5 = 0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1, 2)$.
- α) Να αποδείξετε ότι:
- η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $A(-3, 1)$,
 - η κορυφή $Γ$ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $Γ(5, 3)$,
- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του $BΓ$ και $ΓΔ$.
6. Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$.
- α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB .
- β) Να βρείτε την εξίσωση (ζ) της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB .
- γ) Αν (ζ): $y = x - 4$ και (ϵ): $2x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ) και (ϵ).
7. Δίνονται το σημείο $A(4, -2)$ και η ευθεία (ϵ_1): $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:
- α) την ευθεία (ϵ_2) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ_1),
- β) το σημείο τομής B , των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2): $y = -x + 2$,
- γ) το συμμετρικό Γ του σημείου A , ως προς την ευθεία (ϵ_1).
8. Δίνονται τα σημεία $A(0, 5)$, $B(6, -1)$.
- α) i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .
- ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3, 2)$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .
9. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 5)$, $B(3, 3)$. Να υπολογίσετε:
- α) τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
- β) τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
- γ) την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB .
10. Σε τρίγωνο $ABΓ$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $ΑΓ$ και $BΓ$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες (ϵ_1): $y = -x + 4$ και (ϵ_2): $y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι $Γ(4, 0)$.
- β) Να βρείτε:
- το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $ΑΓ$,
 - την εξίσωση του ύψους $BΔ$.

11. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:
- Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.
 - Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AG .
12. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .
 - Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.
 - Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .
13. Δίνονται τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$ όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .
 - Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .
- 
14. Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.
- Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι κάθετες.
 - Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.
 - Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.
15. Δίνονται οι ευθείες: $(\epsilon_1): 2x + y = 6$ και $(\epsilon_2): x - 2y = -2$.
- Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .
 - Να δείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) , (ϵ_2) και $(\epsilon_3): 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
16. Δίνονται τα σημεία $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $\Gamma(10, 4)$, $\Delta(2, 4)$. Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ K και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN την διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- 
- Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N .
 - Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma$, ΔM , ΔN και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ .
 - Να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

17. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν η ευθεία AB τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα σημείο Δ και η ευθεία $A\Gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο E , τότε:

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και E .

ii. Να αποδείξετε ότι $\overline{A\Delta} = 2\overline{\Delta B}$ και $\overline{AE} = 2\overline{E\Gamma}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι παράλληλη της $B\Gamma$.

18. Δίνονται τα σημεία $A(3,2\alpha)$, $B(4,\alpha)$, $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$,

ii. τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$,

iii. το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,-2)$ και $\vec{\beta} = (1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $K(2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB ,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(4,-1)$ και $B(3,2)$.

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $|\overline{K\Gamma}| = \frac{1}{2}|\overline{AB}|$.

20. Δίνεται η ευθεία $y = \lambda(x-2) + \lambda - 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda = 1$ και όταν $\lambda = 2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο M των δυο ευθειών.

Έστω $M(1, -2)$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ , διέρχονται από το M .

γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής A, B της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

21. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

α) Μια ευθεία (ϵ) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το M. Να βρείτε:

i. την εξίσωση της.

ii. για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

β) Έστω ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A, B αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ , τα μήκη των τμημάτων OA, OB.

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

22. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία

$$O(0,0), A(1,\sqrt{3}), B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

δ) Να δείξετε ότι $\epsilon\phi 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

