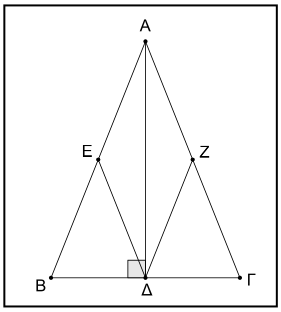
5.9 Μια ιδιότητα του ορθογωνίου τριγώνου

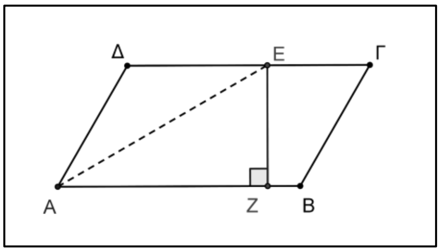
1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = 12$ και το ύψος του ΑΔ. Έστω Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = 6$ και $\Delta Z = 6$.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ρόμβος.

2. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με $A\Delta < AB$ και $\hat{A} = 60^o$. Η ΑΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά ΔΓ σε σημείο Ε και η ΕΖ είναι η κάθετη από το Ε στην πλευρά ΑΒ.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθένα από τα ακόλουθα δύο ερωτήματα, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

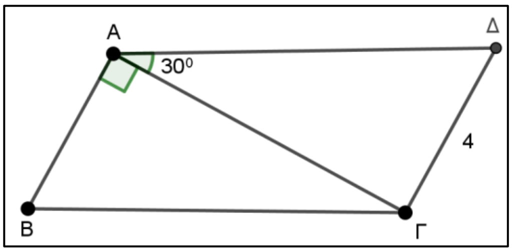
α) Αν είναι $A\Delta = 6$, τότε το ΔΕ είναι ίσο με:

Α: 6 Β: 12 Γ: 3 Δ: 16

β) Αν η κάθετη που άγεται από το Ε προς την ευθεία ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Ζ, τότε:

Α: $AE = EZ$ Β: $AE = \frac{1}{2}EZ$ Γ: $AE = 2EZ$ Δ: $AE = 3EZ$

3. Στο σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο στο οποίο η διαγώνιος ΑΓ είναι κάθετη στην πλευρά του ΑΒ. Επίσης η πλευρά του $\Gamma\Delta = 4$ και η γωνία ΓΑΔ ισούται με 30^o.

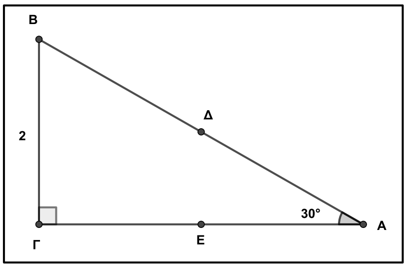


α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι η γωνία ΒΓΔ.

β) Πόσο είναι το μήκος της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος δίνονται $\hat{A} = 30^o$, $B\Gamma = 2$ και τα σημεία Δ, Ε μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

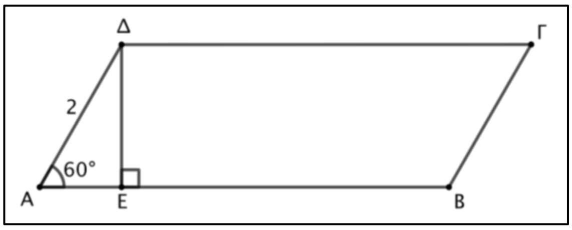


α) το μήκος του ΔΕ.

β) το μήκος της πλευράς ΑΒ.

γ) το μήκος του ΓΔ.

5. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος με $ΑΔ = 2$ και $\hat{Α} = 60^o$.



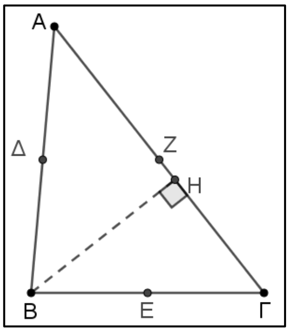
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$ και $Α\hat{Δ}Γ$.

β) Αν ΔΕ είναι ύψος του παραλληλογράμμου, τότε:

i. Να υπολογίσετε τη γωνία $Α\hat{Δ}Ε$.

ii. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 1$.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε το ύψος ΒΗ. Να αποδείξετε ότι:

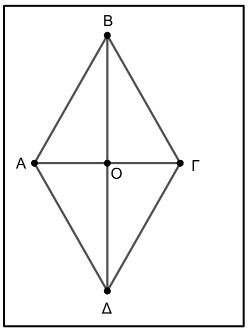


α) **i.** $ΖΔ = ΕΓ$, **ii.** $ΗΕ = ΕΓ$,

β) Η ΔΕ είναι παράλληλη στην ΑΓ.

γ) $ΔΗ = ΖΕ$.

7. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος με κέντρο Ο, $ΑΒ = 4$ και $ΟΑ = 2$.

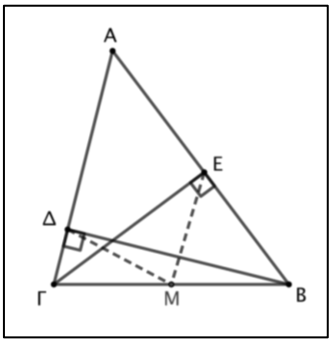


α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $Α\hat{Β}Ο = 30^o$.

β) Να βρείτε τρεις γωνίες στο παρακάτω σχήμα, εκτός της $Α\hat{Β}Ο$, που έχουν μέτρο 30^o. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα στο παρακάτω σχήμα, εκτός του ΑΒ, που έχουν μήκος 4. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

8. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε:

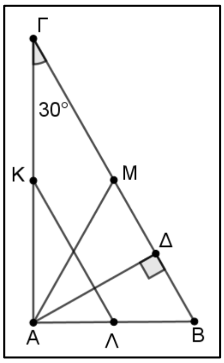


α) Να αποδείεξτε ότι $ΔΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι $ΔΜ = ΕΜ$.

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε, Β και Γ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^o\right)$. Έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΓ, ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα.



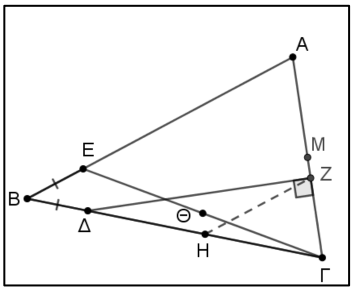
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΚΛ = ΑΜ$,

ii. το ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

β) Έστω $\hat{\Gamma} = 30^o$ και ΑΔ ύψος του τριγώνου. Προεκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΖ. Τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΖΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε στις πλευρές ΒΓ και ΒΑ αντίστοιχα, ώστε $B\Delta = BE$. Φέρνουμε την ΔΖ κάθετη στην ΑΓ. Θεωρούμε τα μέσα Η, Θ, Μ των ΔΓ, ΕΓ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $ZH = \dfrac{\Delta\Gamma}{2}$,

β) $M\Theta = \dfrac{AE}{2}$.

γ) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του, ώστε $ZH = M\Theta$;

11. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο ΕΑΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με $EA = 2A\Delta$. Η παράλληλη από το Ε προς την ΑΔ τέμνει την προέκταση της ΓΔ προς το Δ σε σημείο Β.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τμήμα ΕΑ είναι παράλληλο στο τμήμα ΒΔ. Το τετράπλευρο ΕΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο,

ii. το σημείο Δ είναι το μέσο του ΒΓ και ότι $B\Gamma = 4A\Delta$.

β) Αν το παραλληλόγραμμο ΕΑΓΔ είναι ρόμβος, να βρείτε το είδος του τριγώνου ΒΕΓ ως προς τις γωνίες του.