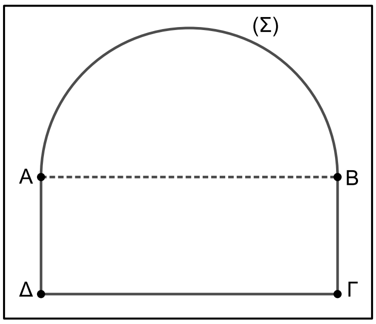
11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα

1. Το διπλανό σχήμα (Σ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται $\mathrm{AB}=8\ \mathrm{cm}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι $\mathrm{E}=8\pi\ \mathrm{cm}^2$,

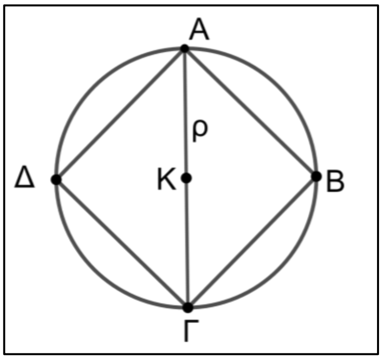
ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι $\mathrm{L}=4\pi\ \mathrm{cm}$.

β) Να βρείτε:

i. το μήκος της πλευράς ΑΔ του ορθογωνίου,

ii. την περίμετρο του σχήματος (Σ).

2. Σε κύκλο (K,ρ) εμβαδού $\mathrm{E}=4\pi$ είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο ΑΒΓΔ, όπως στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε:

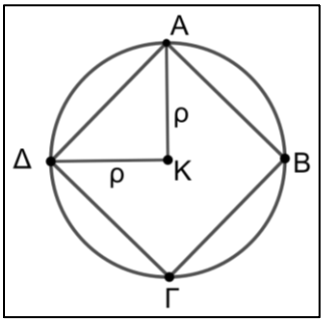


α) την ακτίνα ρ του κύκλου (K,ρ).

β) το μήκος της διαμέτρου ΑΓ του κύκλου (K,ρ) και της πλευράς ΑΒ του τετραγώνου ΑΒΓΔ .

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ .

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (K,ρ), όπως στο διπλανό σχήμα.



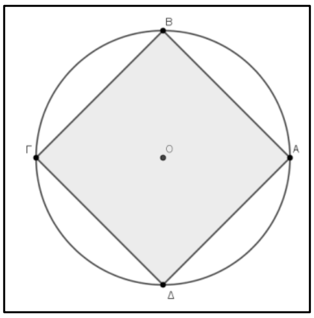
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΔ είναι ορθογώνιο.

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΔ είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι $\rho=\sqrt{8}$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου (K,ρ).

4. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνα ρ και εμβαδόν ίσο με 16π.



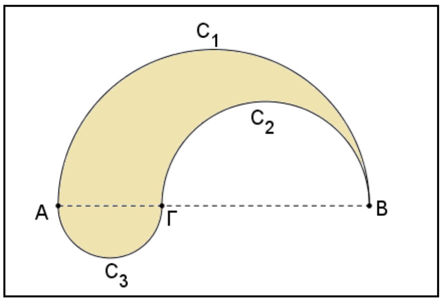
α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

β) Αν η ακτίνα ρ του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο,

ii. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

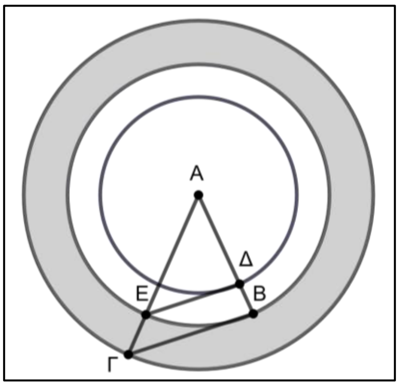
5. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ = 6$, και σημείο του Γ, ώστε $ΒΓ = 4$. Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ σχεδιάζουμε τα ημικύκλια C_1 και C_2 με διαμέτρους ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο C_3 με διάμετρο ΑΓ.



α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων C_1, C_2, C_3 είναι $\frac{9\pi}{2}$, 2π και $\frac{\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

6. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, που η κοινή κορυφή τους Α βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων $(Α, \rho_1), (Α, \rho_2)$ και $(Α, \rho_3)$, η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο $(Α, \rho_3)$, οι κορυφές Β και Ε στον κύκλο $(Α, \rho_2)$ και η κορυφή Δ στον κύκλο $(Α, \rho_1)$, όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε $Ε_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων $(Α, \rho_2)$ και $(Α, \rho_3)$, $Ε_1$ το εμβαδόν του κύκλου $(Α, \rho_1)$, $Ε_2$ το εμβαδόν του κύκλου $(Α, \rho_2)$ και $Ε_3$ το εμβαδόν του κύκλου $(Α, \rho_3)$.



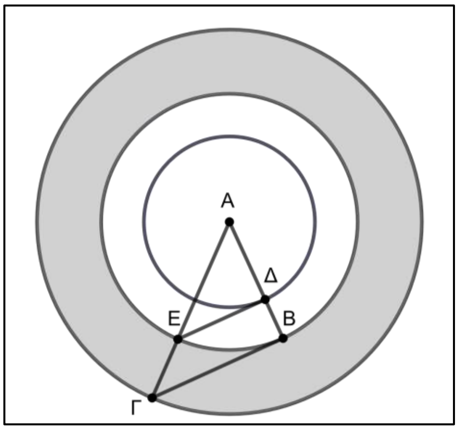
α) Αν $\frac{Ε_{ΕΓ}}{Ε_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$ **ii.** $\frac{Ε_2}{Ε_3} = \frac{9}{16}$

iii. Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

β) Αν $Ε_{ΕΓ} = Ε_2$ και επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $Ε_{ΔΒ} = Ε_1$, όπου $Ε_{ΔΒ}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων $(Α, \rho_1)$ και $(Α, \rho_2)$.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε ώστε $ΑΕ = ΑΒ$. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνες $\rho = ΑΔ$, $r = ΑΒ = ΑΕ$ και $R = ΑΓ$ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους $(Α, \rho), (Α, r)$ και $(Α, R)$ όπως στο σχήμα. Έστω $Ε_{ΕΓ}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων $(Α, r)$ και $(Α, R)$, $Ε_{ΔΒ}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων $(Α, \rho)$ και $(Α, r)$, $Ε_{ΑΕ}$ το εμβαδόν του κύκλου $(Α, r)$ και $Ε_{ΑΔ}$ το εμβαδόν του κύκλου $(Α, \rho)$.

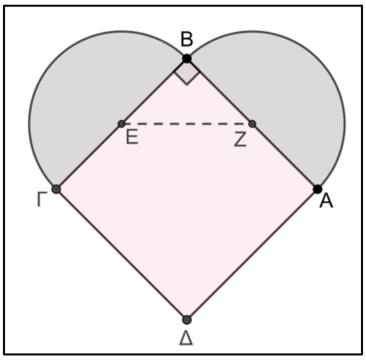


α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\dfrac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \dfrac{R^2 - r^2}{r^2}$ **ii.** $\dfrac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΕ}} = \dfrac{r^2 - \rho^2}{\rho^2}$

β) Αν επιπλέον οι ΔΕ και ΒΓ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{E_{ΕΓ}}{E_{ΑΕ}} = \dfrac{E_{ΔΒ}}{E_{ΑΔ}}$.

8. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi \cdot \alpha$.

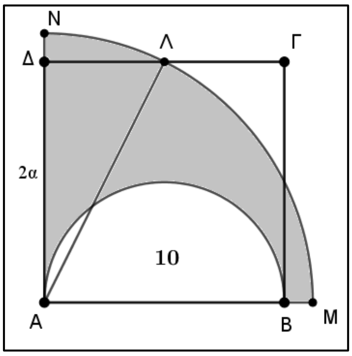
β) **i.** Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi + 4$, να υπολογίσετε το α.

ii. Αν $\alpha = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο $\dfrac{(\tau)}{(ΑΒΓΔ)}$ με την μονάδα.

Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

9. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:



α) Να αποδείξετε ότι:

i. το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = \dfrac{80}{\pi}$,

ii. $ΑΛ^2 = \dfrac{100}{\pi}$.

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{Α\, ΜΝ}$, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ,

ii. τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $Α\, ΜΝ$, προς το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.