5.2 Λογάριθμοι

1. Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 5 - \log 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x$.

2. Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$.

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^{\lambda} = A$.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα **β),** να αποδείξετε ότι $\ln\lambda < 0$.

3. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

β) Να αποδείξετε ότι :

i. $\beta + \alpha > 1$, **ii.** $\ln\frac{\alpha}{\beta} < 0$.

4. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\beta + \alpha = 3$,

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$,

γ) $10^{\beta} - 10^{\alpha} = 10 \cdot (\beta + \alpha)$.

Δίνεται ότι $e \simeq 2,71$.

5. Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1,386$ και $\ln 5 = 1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln\frac{e}{5} - \ln\frac{4}{e}$.

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4,381$.

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\log_2 8) \cdot x^3 + \left(4\log_2 \sqrt{2}\right) \cdot x^2 - (4\log_2 1) \cdot x + 1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$.

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

7. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$.

Δίνεται $e \simeq 2.71$.

8. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$.

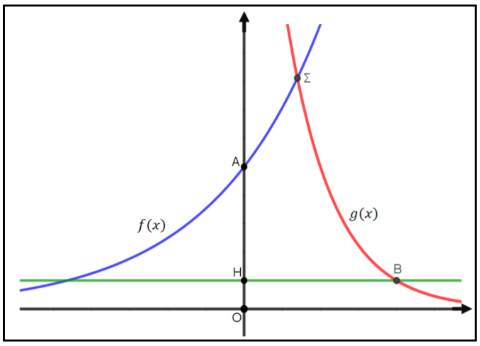
β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$

9. Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \dfrac{3\alpha}{\beta}$

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.

10. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 5^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H\left(0, \dfrac{1}{5}\right)$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων Β, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $x_B - x_\Sigma = \log 20$.

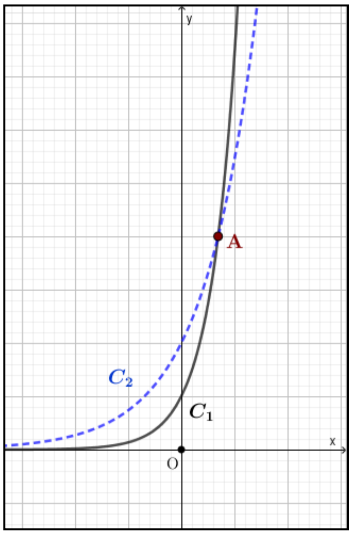
11. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = e^{\kappa x}$, $\kappa \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Να αποδείξετε ότι αν $\kappa > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$.

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^x$ και $k(x) = e^{2x}$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου Α;



12. Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ, σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t, σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$. Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους $100^\circ C$ και στη συνέχεια

αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία $30^{o}C$. Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι $80^{o}C$.

α) Να αποδείξετε ότι $k=-0,0672$.

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t)=30+70\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{5}}$.

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{5}{7}\right)=-0,336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}\cong 0,034$.

13. **α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

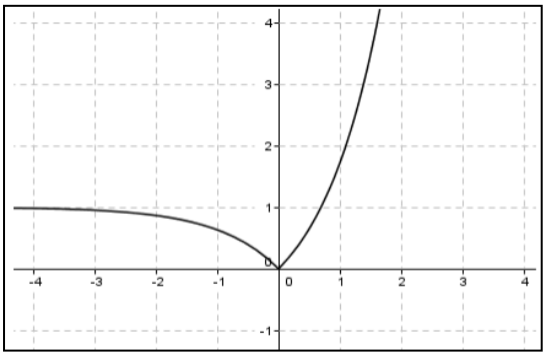
ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

14. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=|e^x-1|,\ x\in\mathbb{R}$.



α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$.

15. Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες X, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λ.π.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I=I_0\cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda>0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1,4\ m^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $\ln 2 = 0,7$).

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος 10 m η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξτε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_0 \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

16. Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 – Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο $D = 10 \cdot \log\left(10^{12} \cdot I\right)$.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	**0 ντεσιμπέλ**
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριωθούμενο	140 ντεσιμπέλ

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

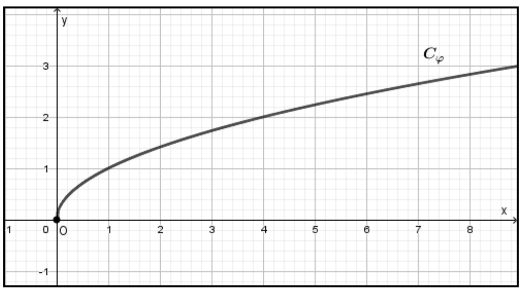
β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι $1\ W/m^2$ να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0,3$).

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, με $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.



i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτηση φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \dfrac{1+\ln 10}{3}$.

18. Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο $\left(W/m^2\right)$. Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}\,W/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10\cdot\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100\,W/m^2$.

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

19. **α)** **i.** Να λύσετε την εξίσωση $x\left(e^x - 1\right) = 0$.

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x\left(e^x - 1\right)$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x\left(e^x - 1\right)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0), f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x\left(e^x - 1\right)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

20. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

ii. να αποδείξετε ότι $P\left(\log\sqrt{10}\right) > 0$.

21. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}+2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x)=ex^3+2x^2+2$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $(\varepsilon): y=ex+4$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $(\varepsilon): y=ex+4$.

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e)-e^2-4$.

22. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α.

β) Για $\alpha=15$:

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$.

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$.

23. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f\left(\ln\dfrac{1}{2}\right)$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta\neq 0$.

25. Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-192\left(e^{\frac{x}{100}}+e^{-\frac{x}{100}}\right)+576$, με $f(x)\geq 0$, όπου οι αριθμοί x, $f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m). (Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι 192 m.

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cong 0,96$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ.