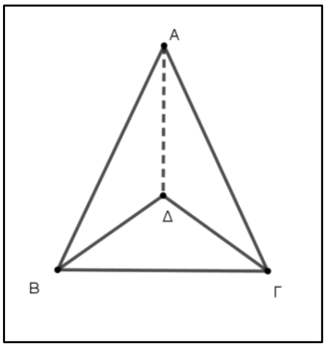
3.3 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ – Π – Γ)

3.4 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π – Π – Π)

1. Στο διπλανό σχήμα, τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΒΔΓ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΒΓ.



α) Στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τα κενά με τις ίσες πλευρές και τις ίσες γωνίες για τα δυο ισοσκελή τρίγωνα ΒΑΓ και ΒΔΓ.

1. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΑΓ είναι οι ………και …….

2. Οι ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΓ είναι οι …….. και …….

3. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΓ η γωνία $\mathrm{B\hat{Γ}Δ}$ είναι ίση με την γωνία ……..

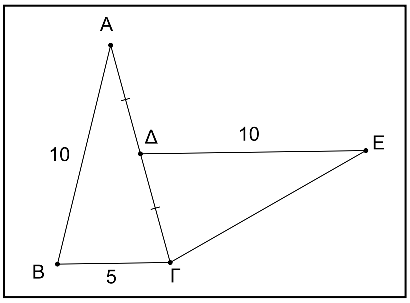
4. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ η γωνία $\mathrm{B\hat{Γ}A}$ είναι ίση με την γωνία ……..

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα.

γ) Στον πίνακα που ακολουθεί, στη στήλη Α δίνονται γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ, ενώ στη στήλη Β δίνονται γωνίες του τριγώνου ΑΔΓ. Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία του τριγώνου ΑΔΒ με την αντίστοιχη ίση της γωνία του τριγώνου ΑΔΓ που προκύπτουν ως άμεσα συμπεράσματα από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ του **β)** ερωτήματος.

Στήλη Α (γωνίες τριγώνου ΑΔΒ)	Στήλη Β (γωνίες τριγώνου ΑΔΓ)
1. γωνία $\mathrm{A\hat{B}Δ}$	**α)** γωνία $\mathrm{Γ\hat{A}Δ}$
2. γωνία $\mathrm{A\hat{Δ}B}$	**β)** γωνία $\mathrm{A\hat{Γ}Δ}$
3. γωνία $\mathrm{B\hat{A}Δ}$	**γ)** γωνία $\mathrm{A\hat{Δ}Γ}$

2. Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ με $\mathrm{AB = AΓ}$ και $\mathrm{EΔ = EΓ}$. Αν $\mathrm{BΓ = 5}$, $\mathrm{AB = EΔ = 10}$ και Δ είναι το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

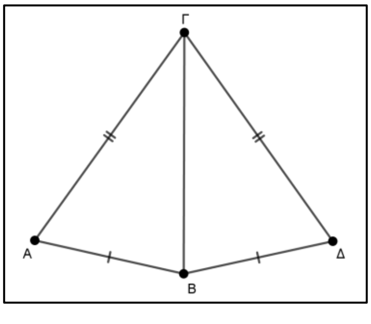


α) $\mathrm{BΓ = ΔΓ}$,

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα,

γ) $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{E}}$.

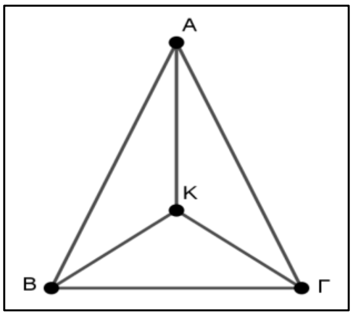
3. Στο σχήμα ισχύουν $\mathrm{AB = BΔ}$, $\mathrm{AΓ = ΓΔ}$ και η $\mathrm{B\hat{A}Γ = 75^o}$.



α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΓ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{B\hat{Δ}Γ}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

4. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου, τέτοιο ώστε $ΚΒ = ΚΓ$. Να αποδείξετε ότι:

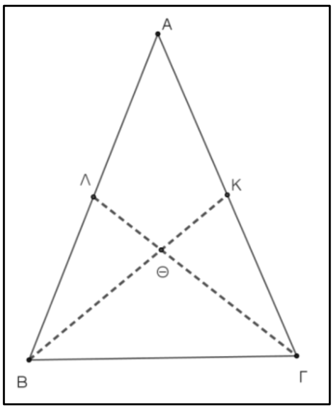


α) οι γωνίες $Κ\hat{Β}Γ$ και $Κ\hat{Γ}Β$ είναι ίσες,

β) τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΓΑΚ είναι ίσα,

γ) η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Γ$.

5. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Θ.



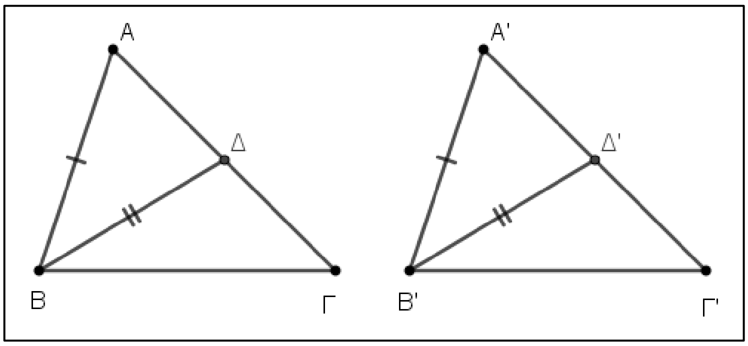
α) **i.** Να δικαιολογήσετε γιατί είναι $ΛΒ = ΚΓ$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΛΒΓ και ΚΓΒ είναι ίσα.

β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΒΘΓ ως προς τις πλευρές του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν η διάμεσος ΒΚ είναι και ύψος του τριγώνου ΑΒΓ στην πλευρά του ΑΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

6. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και $Α'Β'Γ'$ του σχήματος με $ΑΓ = Α'Γ'$, $ΑΒ = Α'Β'$. Οι διάμεσοι ΒΔ και $Β'Δ'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:



α) Να αποδείξετε ότι $\hat{Α} = \hat{Α}'$.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα στοιχεία που έχουμε δεν αρκούν για να θεωρήσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και $Α'Β'Γ'$ είναι ίσα.
Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

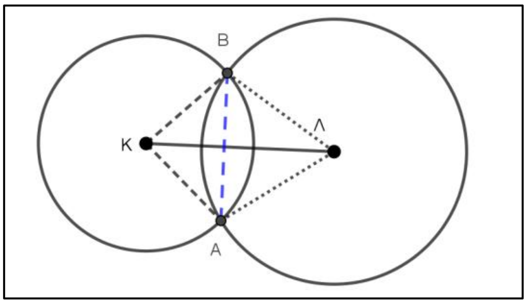
7. Στις πλευρές μίας γωνίας $x\hat{O}y$ παίρνουμε τα σημεία Α, Β στην Οx και Γ, Δ στην Οy, ώστε $ΟΑ = ΟΓ$ και $ΟΒ = ΟΔ$. Έστω Μ τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας $x\hat{O}y$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΜΒ = ΜΔ$.

β) Να αποδείξετε ότι $Α\hat{Μ}Β = Γ\hat{Μ}Δ$.

γ) Να αποδείξετε ότι $Α\hat{Μ}Ο = Γ\hat{Μ}Ο$.

8. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι με κέντρα τα σημεία Κ, Λ και έστω Α, Β τα σημεία τομής τους. Να αποδείξετε ότι:



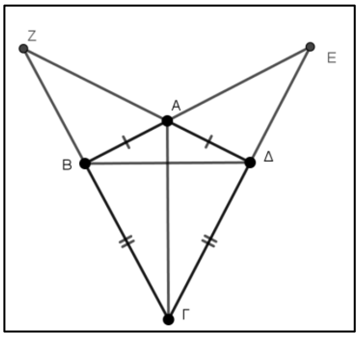
α) τα τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΚΛ είναι ίσα,

β) τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΒ είναι ισοσκελή με βάση την ΑΒ,

γ) Η ΚΛ είναι:

i. διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A\hat{K}B}$, **ii.** κάθετη στη χορδή ΑΒ.

9. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}$ και $\Gamma\mathrm{B} = \Gamma\Delta$. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΓΔ τέμνονται στο Ε, και οι προεκτάσεις των ΔΑ και ΓΒ τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι:



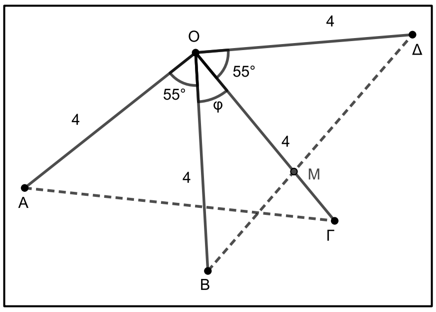
α) Η ΓΑ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

β) Οι γωνίες $\mathrm{Z\hat{A}\Gamma}$ και $\mathrm{E\hat{A}\Gamma}$ είναι ίσες.

γ) $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{E}$.

10. Για τις γωνίες του παρακάτω σχήματος δίνεται ότι: $\mathrm{A\hat{O}B} = \Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 55^{o}$,

$\mathrm{B\hat{O}\Gamma} = \varphi$ και $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{O\Delta} = 4$.



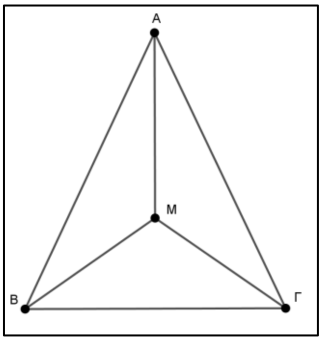
α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $\mathrm{A\hat{O}\Gamma}$ και $\mathrm{B\hat{O}\Delta}$ είναι ίσες,

ii. τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ είναι ίσα.

β) Αν Μ είναι το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ, πόσες μοίρες θα έπρεπε να είναι η γωνία φ, ώστε το σημείο Μ να είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

11. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και σημείο Μ, εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η ΜΑ διχοτομεί τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$.

γ) Προεκτείνουμε την ΑΜ προς το μέρος του Μ και η προέκταση τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι το ΜΔ είναι ύψος του τριγώνου ΜΒΓ.