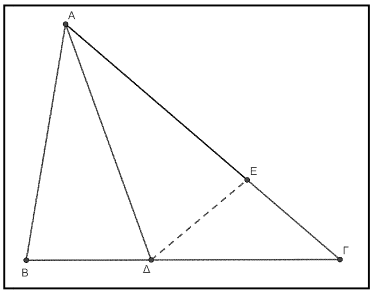
5.8 Ορθόκεντρο τριγώνου

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι :

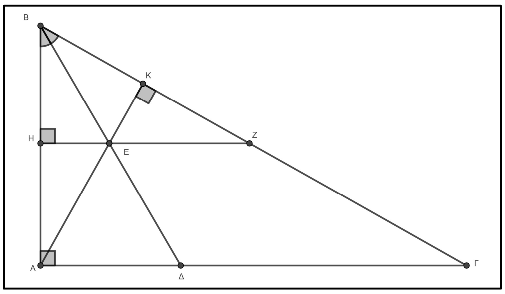


α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα,

β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΕ,

γ) αν το ύψος από την κορυφή Β του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΑΔ στο Η τότε η ευθεία ΕΗ είναι κάθετη στην ΑΒ.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{o}\right)$ με ΒΔ διχοτόμο και ΑΚ ύψος, που τέμνονται στο Ε. Η κάθετη από το Ε στην ΑΒ τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα Η και Ζ αντίστοιχα.

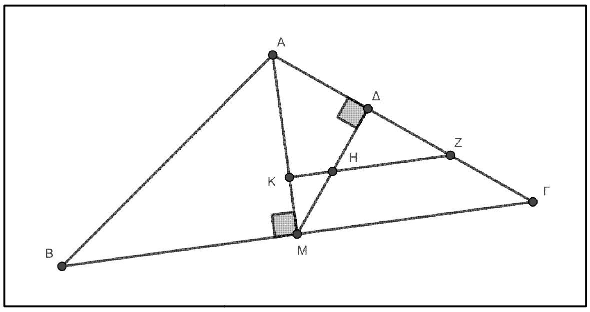


α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΕΗΑ και ΕΚΖ είναι ίσα,
ii. το τρίγωνο ΒΚΗ είναι ισοσκελές,
iii. η ΒΔ είναι κάθετη στην ΑΖ.

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ΜΔ κάθετη στην ΑΓ και θεωρούμε Η το μέσο του τμήματος ΜΔ. Από το Η φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ η οποία τέμνει τις ΑΜ και ΑΓ στα σημεία Κ και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $HZ=\dfrac{B\Gamma}{4}$,

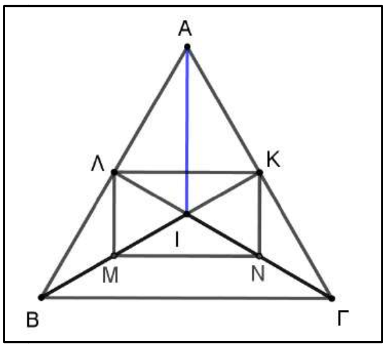
β) ΜΖ // ΒΔ ,

γ) η ευθεία ΑΗ είναι κάθετη στη ΒΔ.

4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΚ και ΓΛ, τα οποία τέμνονται στο Ι. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΙΒ και ΙΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) το ΑΙ προεκτεινόμενο διέρχεται από το , μέσο της πλευράς ΒΓ.

β) το τετράπλευρο ΜΛΚΝ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

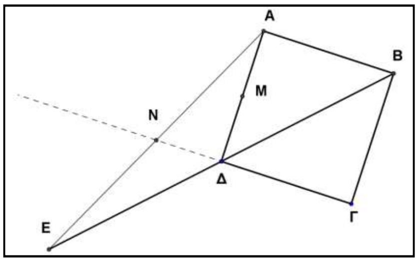


5. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ , προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΒΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $ΔΕ = ΔΒ$. Έστω Μ το μέσο της ΑΔ και Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΕ και ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΝ = ΔΜ$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΝΜΔ .

γ) Να αποδείξετε ότι: **i.** $ΜΝ \perp ΑΓ$, **ii.** $ΓΜ \perp ΑΝ$.



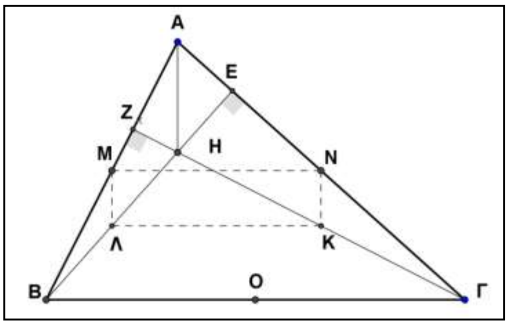
6. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , ΒΕ , ΓΖ τα ύψη από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ , Ν , Κ , Λ τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ , ΑΓ , ΓΗ , ΒΗ αντίστοιχα .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΜΝ = ΛΚ$, **ii.** $ΝΚ = ΜΛ = \frac{ΑΗ}{2}$,

iii. το τετραύπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο.

β) Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ , να αποδείξετε ότι $Μ\hat{Ο}Κ = 90^{o}$.

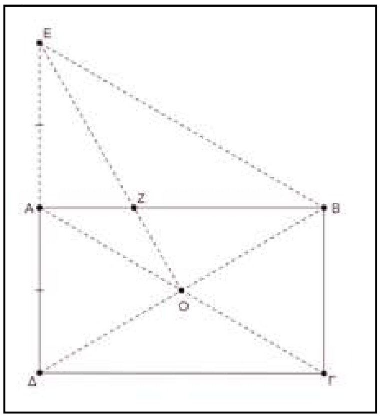


7. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $ΑΓ = 2ΒΓ$. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ , προς το Α , παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΔΑ = ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι:

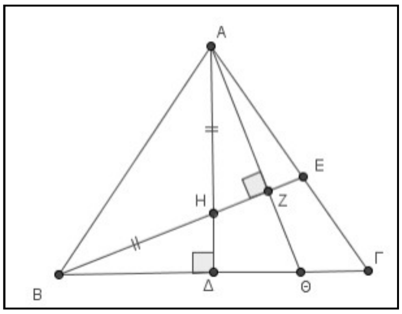
α) το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο,

β) το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο ,

γ) αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ , να αποδείξετε ότι $ΔΖ \perp ΕΒ$.



8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ . Στο ΑΔ θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε $HA = HB$. Έστω ότι Ε είναι το σημείο τομής της ΒΗ με την ΑΓ . Φέρνουμε την ΑΖ κάθετη στη ΒΕ , η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Θ .



α) Να αποδείξετε ότι:

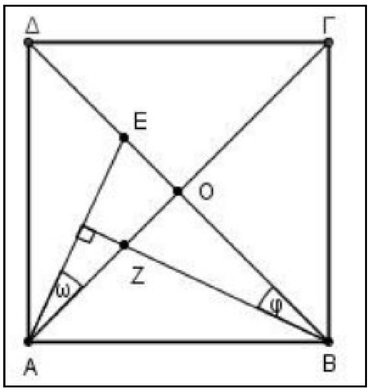
i. τα τρίγωνα ΗΔΒ και ΗΖΑ είναι ίσα,

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$,

iii. η ευθεία ΘΗ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΗΒ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

9. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ ονομάζουμε Ο το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο Ε του τμήματος ΟΔ . Φέρνουμε την κάθετη από το Β στην ΑΕ , που τέμνει το τμήμα ΑΟ στο Ζ . Να αποδείξετε ότι:



α) οι γωνίες ω και φ του σχήματος είναι ίσες ,

β) $BZ = AE$ και $\Gamma Z = BE$,

γ) το τμήμα ΕΖ είναι κάθετο στο ΑΒ .