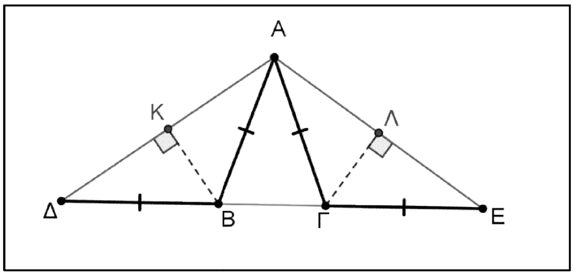
5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

1. Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΔ με $AB = B\Delta = 5$ και ΑΓΕ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους ΒΚ και ΓΛ αντίστοιχα.



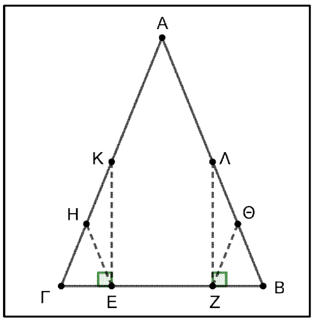
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή,

ii. τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με 12, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΚΛ.

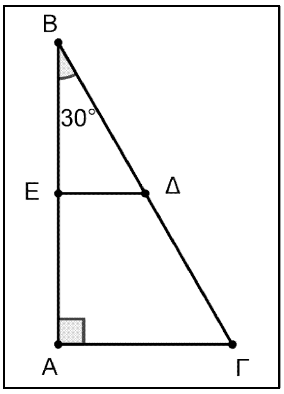
2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τρίγωνα ΚΕΓ και ΛΖΒ είναι ίσα.

β) $EH = Z\Theta$, όπου Η , Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα.

3. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:



α) ΑΓ **β)** ΒΓ **γ)** ΑΔ

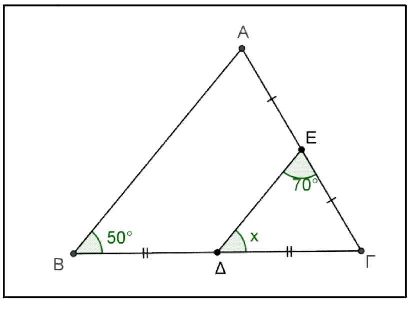
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta\hat{E}\Gamma = 70^\circ$.



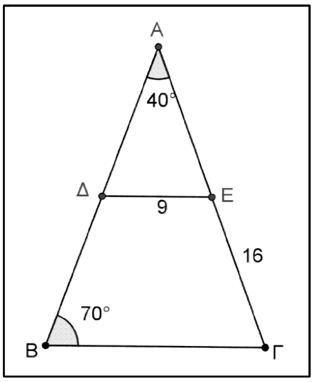
α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$.

β) Να υπολογίσετε:

i. τη γωνία $\hat{x}$,

ii. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=40^o$ και $\hat{B}=70^o$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με $\Delta E=9$ και $E\Gamma=16$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του,

ii. $B\Gamma=18$.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

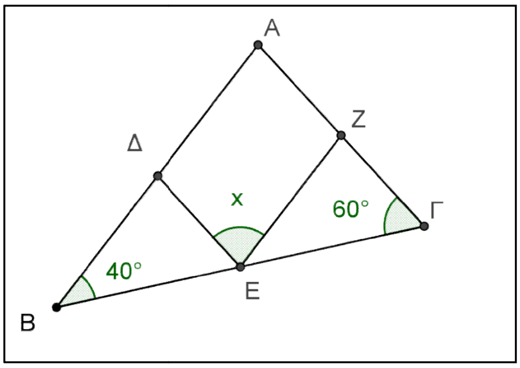
7. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^o\right)$ και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας του $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta=\dfrac{B\Gamma}{2}$,

β) το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές,

γ) $\Delta E=\dfrac{A\Gamma}{2}$.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=40^o$ και $\hat{\Gamma}=60^o$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα

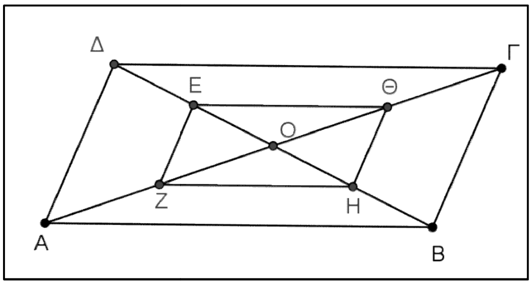


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ // ΑΓ και ΖΕ // ΑΒ .

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΕ.

9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, του οποίου οι διαγώνιοι ΑΓ και ΔΒ τέμνονται στο σημείο Ο. Έστω Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του ΕΘΗΖ.

10. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

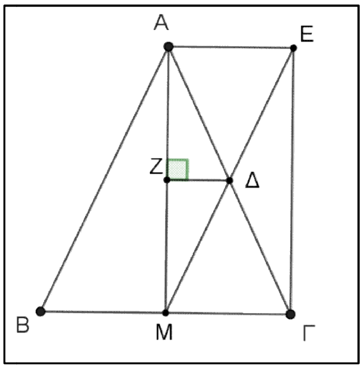
α) το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο,

β) η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ.

11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ})$ και η διάμεσός του ΑΜ. Στο τρίγωνο ΑΜΓ θεωρούμε τη διάμεσο ΜΔ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα ΔΕ=ΔΜ. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα ΔΖ κάθετο στην ΑΜ.
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο,

β) $\text{ΔΖ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{4}$.



12. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα $\text{ΑΗ} = \text{ΑΔ}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

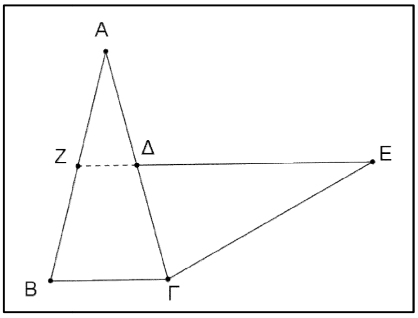
α) το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές,

β) το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{\text{Ζ}}$.

13. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} = \text{ΕΓ} = \text{ΕΔ}$, όπου Δ είναι το μέσο της ΑΓ και $\text{ΒΓ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$. Έστω Ζ το σημείο στο οποίο η προέκταση της ΕΔ προς το Δ τέμνει την ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα,

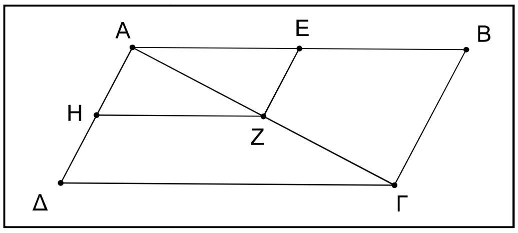
β) το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.



14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΖΗ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$,

β) το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.



15. Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ ,

β) το ΑΕ είναι ίσο με το $\dfrac{1}{4}$ του ΑΓ.

16. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\text{Α}} = 90^{\circ}\right)$ και Μ το μέσο της υποτείνουσας του ΒΓ. Από το Μ φέρουμε $\text{ΜΔ} \perp \text{ΑΒ}$ και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΔΖ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΜΒΖ είναι ισοσκελές,

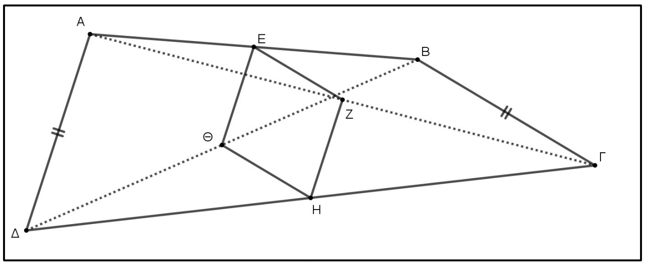
ii. το τετράπλευρο ΑΜΒΖ είναι ρόμβος.

β) Αν το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το ΑΜΒΖ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

17. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος ισχύει ότι $ΑΔ = ΒΓ$ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ και ΒΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) $ΕΖ // = ΗΘ$,

β) το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

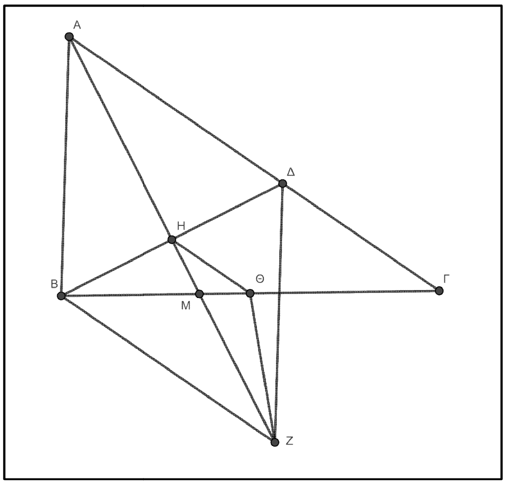


18. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ. Από το Β φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο ΑΜ της γωνίας Α, η οποία τέμνει την ΑΜ στο Η και την ΑΓ στο Δ. Στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $ΑΗ = ΗΖ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ρόμβος,

β) $ΗΘ // ΒΖ$,

γ) $ΗΘ = \dfrac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$.

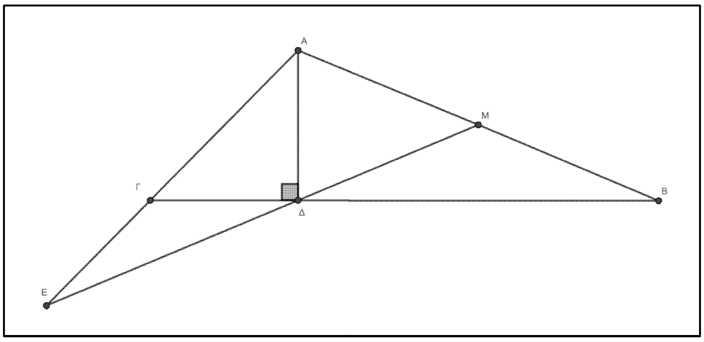


19. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ>ΑΓ), ΑΔ το ύψος του και Μ το μέσο του ΑΒ. Η προέκταση της ΜΔ τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ε ώστε $ΓΔ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{Β} = \hat{Ε}$,

β) $\hat{Γ} = 2\hat{Β} = Α\hat{Μ}Δ$,

γ) $ΓΕ < ΑΓ$.

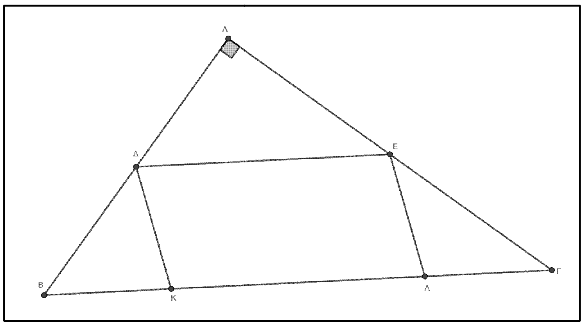


20. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^{o}$ και Δ και Ε τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στο τμήμα ΒΓ θεωρούμε σημεία Κ και Λ ώστε $ΔΚ = ΚΒ$ και $ΕΛ = ΛΓ$. Να αποδείξετε ότι:

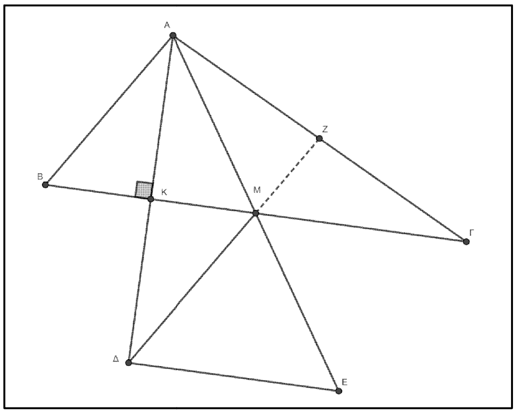
α) $Δ\hat{Κ}Λ = 2\hat{Β}$ και $Ε\hat{Λ}Κ = 2\hat{Γ}$,

β) Το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) $ΔΕ = 2ΔΚ$.



21. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ τέτοια ώστε $ΑΜ = ΑΒ$. Φέρουμε το ύψος του ΑΚ και το προεκτείνουμε (προς το Κ) κατά τμήμα $ΚΔ = ΑΚ$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$. Να αποδείξετε ότι:



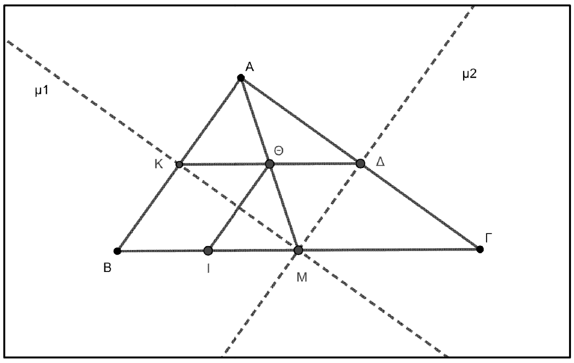
α) $ΔΕ \perp ΑΔ$ και $ΔΕ = 2ΚΜ$,

β) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) το τετράπλευρο ΑΒΔΜ είναι ρόμβος,

δ) η προέκταση της ΔΜ τέμνει το ΑΓ στο μέσον του Ζ.

22. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τις μεσοκαθέτους $μ_1$, $μ_2$ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο μέσο Μ της ΒΓ.



α) Να αποδείξετε ότι:

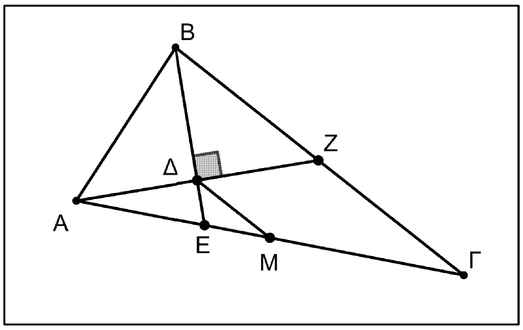
i. το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{Α} = 90^o$.

ii. το τετράπλευρο ΑΛΜΚ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

iii. $ΛΘ = \frac{ΒΓ}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των ΑΜ και ΚΛ.

β) Αν Ι σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $ΒΙ = \frac{ΒΓ}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΘΙΒ είναι παραλληλόγραμμο.

23. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΒΓ$ και η διχοτόμος ΒΕ της γωνίας $\hat{Β}$. Αν $ΑΖ \perp ΒΕ$, όπου Ζ σημείο της ΒΓ και Μ το μέσον της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

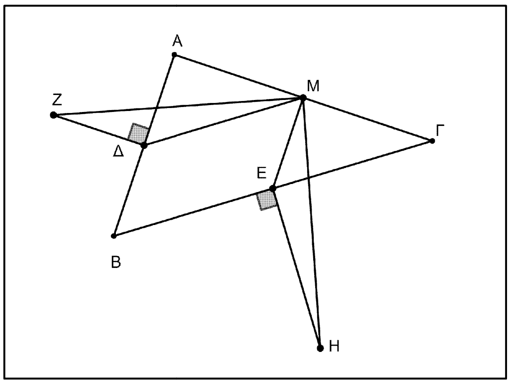


α) το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές,

β) $ΔΜ // ΒΓ$ και $ΔΜ = \frac{ΒΓ - ΑΒ}{2}$,

γ) $Ε\hat{Δ}Μ = \frac{\hat{Β}}{2}$, όπου $\hat{Β}$ η γωνία του τριγώνου ΑΒΓ.

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ οξείες και Δ, Μ και Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των ΑΒ και ΒΓ και εκτός του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΔΖ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΕΗ = \frac{ΒΓ}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο ΒΔΜΕ είναι παραλληλόγραμμο,

ii. τα τρίγωνα ΖΔΜ και ΕΜΗ είναι ίσα.

β) Αν τα σημεία Ζ, Δ, Ε είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A} = 90^\circ$.

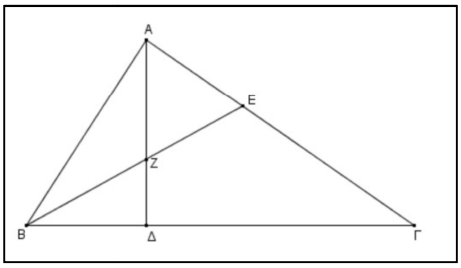
25. **α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές.

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο.

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

26. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω ΑΔ ύψος και ΒΕ διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Ζ.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ = BZ$,

ii. $A\Delta = \frac{3}{2}BZ$.

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

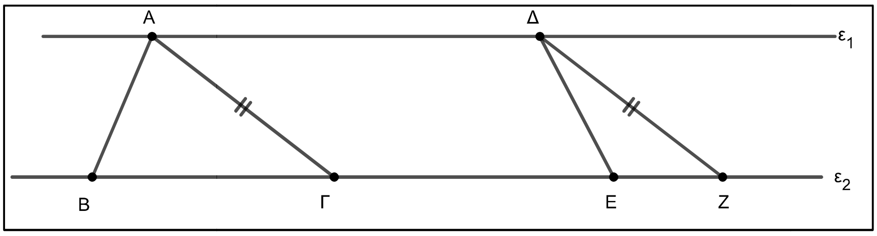
27. Σε τρίγωνο ΔΕΖ, φέρουμε τη διάμεσο ΔΜ και στην προέκτασή της προς το μέρος του Μ παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $\Delta M = M\Theta$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΕΖ προς το Ε κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Ζ κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΑΜ και ΘΓΜ είναι ίσα.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΘΑΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι ΑΔ=12. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου ΕΗ του τριγώνου ΔΕΖ στο σχήμα του Γιάννη;

28. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $A\Gamma = \Delta Z$.



α) **i.** Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντάς τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα.

ii. Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$.

29. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, το μέσο Μ της βάσης ΒΓ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α) Αν από το μέσο Μ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. $ME = MZ$,

ii. το ΑΕΜΖ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με 2ΑΒ .

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, διαφορετικό από το μέσο Μ, και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου ΑΚΔΛ;

ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου ΑΚΔΛ με την περίμετρο του ρόμβου ΑΕΜΖ του ερωτήματος **α) ii.** και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

30. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ στην πλευρά ΑΒ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{M}\Gamma = B\hat{\Gamma}M$.

β) Αν το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με βάση ΑΒ, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Μ στην ΑΒ ώστε το τρίγωνο ΔΜΓ να είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta\Gamma$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας.

γ) Αν Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΓ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΜΔΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

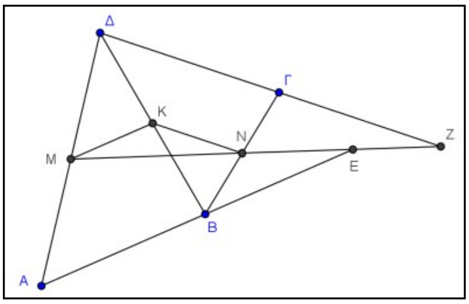
31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΔ . Έστω Ε , Ζ και Η τα μέσα των ΒΔ , ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να βρείτε τη σχεση των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ , ώστε το παραλληλόγραμμο ΔΕΖΗ να είναι ρόμβος.

γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο $\left(\hat{B} = 90^\circ\right)$, να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ .

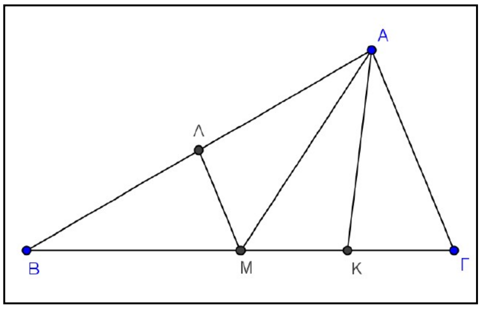
32. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΓΔ και Μ , Ν , Κ τα μέσα των ΑΔ , ΒΓ , ΒΔ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΔΓ τέμνουν την προέκταση της ΜΝ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) $MK = KN$,

β) $M\hat{E}A = M\hat{Z}\Delta$.

33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω ΑΜ διάμεσος του ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΜΓ και ΑΒ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:

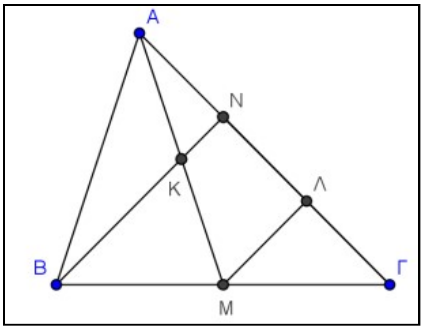


α) $M\hat{A}\Gamma = A\hat{M}\Gamma$,

β) $M\Lambda = MK$,

γ) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Lambda\hat{M}K$.

34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , ΑΜ η διάμεσός του και Κ το μέσο του ΑΜ . Αν η προέκταση της ΒΚ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν και Λ είναι το μέσο του ΓΝ , να αποδείξετε ότι:

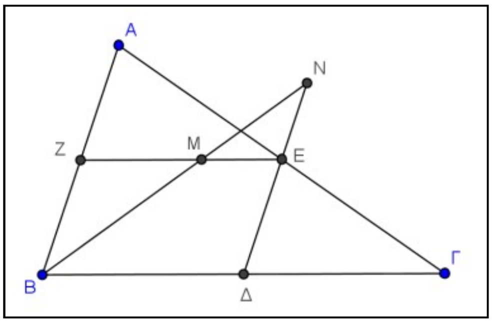


α) το σημείο Ν είναι μέσο του ΑΛ ,

β) $\text{Κ}\hat{\text{Μ}}\text{Γ} = \text{Μ}\hat{\text{Β}}\text{Κ} + \text{Α}\hat{\text{Κ}}\text{Ν}$,

γ) $\text{ΒΚ} = 3\text{ΚΝ}$.

35. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΓ} > \text{ΑΒ}$ και Δ , Ε , Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ , ΑΓ , ΑΒ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$ τέμνει την ΖΕ στο σημείο Μ και την προέκταση της ΔΕ στο σημείο Ν , να αποδείξετε ότι:



α) το τετράπλευρο ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο ,

β) τα τρίγωνα ΒΖΜ και ΜΕΝ είναι ισοσκελή ,

γ) $\text{ΒΖ} + \text{ΝΕ} = \text{ΔΓ}$.

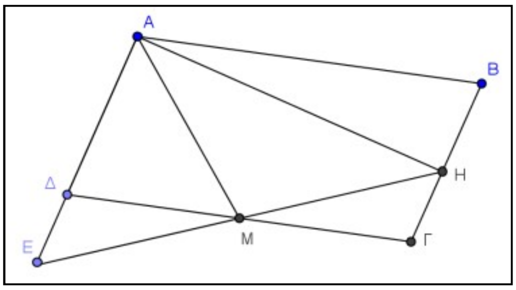
36. **α)** Σε ρόμβο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ , Λ , Μ , Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

37. **α)** Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ , Λ , Μ , Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ , τα μέσα Κ , Λ , Μ , Ν των πλευρών του ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ , πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

38. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\text{ΑΒ} = 2\text{ΒΓ}$, τη γωνία $\hat{\text{Α}}$ αμβλεία και Μ το μέσο της ΓΔ . Φέρουμε κάθετη στην ΑΔ στο σημείο Α , η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Η. Αν η προέκταση της ΗΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε , να αποδείξετε ότι:

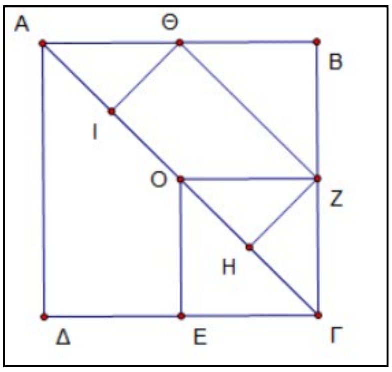


α) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\text{Δ}\hat{\text{Α}}\text{Β}$,

β) τα τμήματα ΕΗ , ΔΓ διχοτομούνται ,

γ) $\hat{\text{Ε}} = \text{Δ}\hat{\text{Μ}}\text{Α}$.

39. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ . Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι , Ο και Η ώστε $\text{ΑΙ} = \text{ΙΟ} = \text{ΟΗ} = \text{ΗΓ}$. Αν Ε , Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ , ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

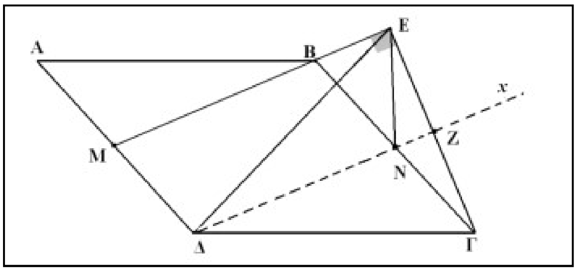


α) το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο ,

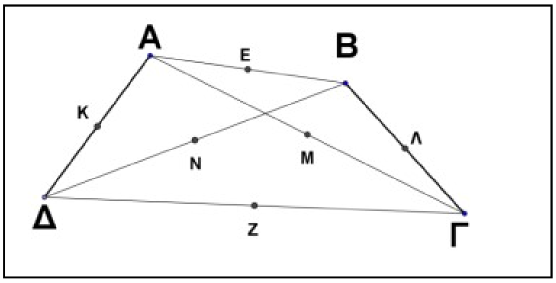
β) $\text{ΖΗ} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{4}$,

γ) το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $\text{ΘΖ} = 2\text{ΘΙ}$.

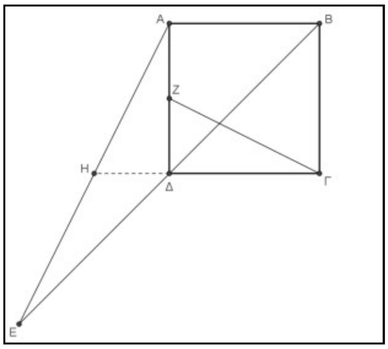
40. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Θεωρούμε το μέσο Μ της πλευράς ΑΔ και ΓΕ κάθετος από την κορυφή Γ στην ευθεία ΜΒ $(\Gamma E \perp MB)$. Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία ΜΒ $(\Delta x // MB)$ τέμνει τις ΒΓ και ΓΕ στα σημεία Ν , Ζ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΜΒΝΔ είναι παραλληλόγραμμο ,
β) το σημείο Ζ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΓΕ ,
γ) $\Delta E = \Delta\Gamma$.



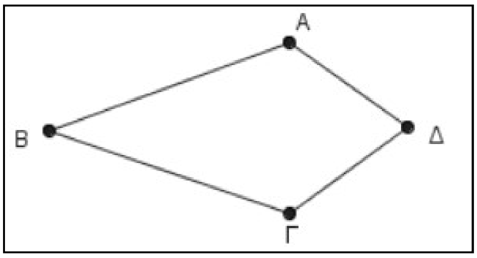
41. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $A\Delta = B\Gamma$. Αν Ε , Λ , Ζ , Κ , Ν , Μ είναι τα μέσα των ΑΒ , ΒΓ , ΓΔ , ΔΑ , ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΕΜΖΝ είναι ρόμβος ,
β) η ΕΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΜΝ ,
γ) $KE = Z\Lambda$,
δ) τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ , ΜΝ , ΕΖ διέρχονται από το ίδιο σημείο .



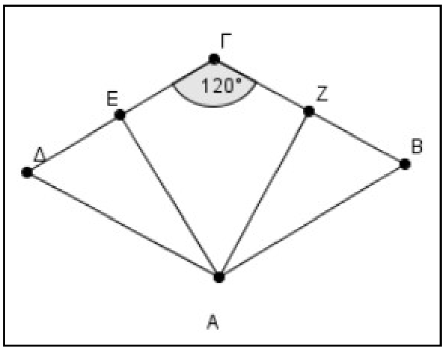
42. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ . Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ το μέσο της ΑΔ . Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η . Να αποδείξετε ότι:
α) $\Delta H = \dfrac{AB}{2}$,
β) τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα ,
γ) η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ .



43. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές ,
β) οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα,
γ) το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



44. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\hat{\Gamma} = 120^o$.Έστω ότι ΑΕ και ΑΖ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α στις πλευρές ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι:
  i. τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΓΒ αντίστοιχα .
  ii. $A\Gamma \perp EZ$.
β) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΜΝΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



45. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ , Λ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου και Δ , Ε τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ // ΒΓ .

β) Στην περίπτωση που το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και Δ , Ε είναι τα συμμετρικά του Μ ως προς Κ και Λ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ , Α και Ε είναι συνευθειακά.

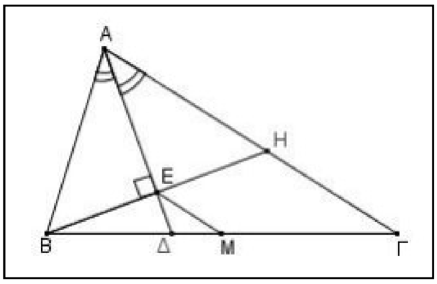
46. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο ,

β) $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$,

γ) οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ .

47. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) και η διχοτόμος του ΑΔ . Φέρουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά ΑΓ στο Η . Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ , να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές ,

β) ΕΜ // ΗΓ ,

γ) $\mathrm{EM} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma} - \mathrm{AB}}{2}$.