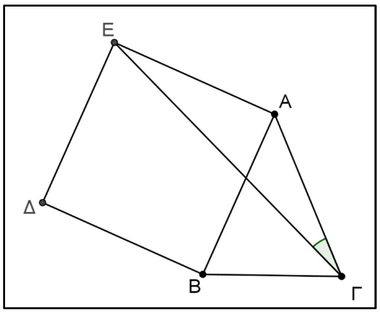
5.5 Τετράγωνο

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ.

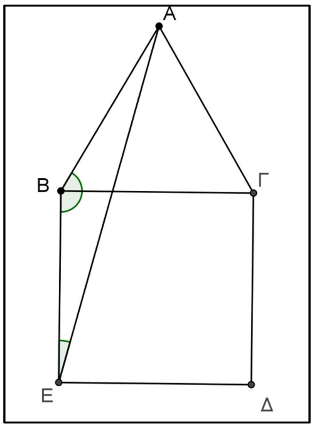


Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές,

β) $2Ε\hat{Γ}Α = 90^o - Β\hat{Α}Γ$.

2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες :

i. $Α\hat{Β}Ε$, **ii.** $Β\hat{Ε}Α$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

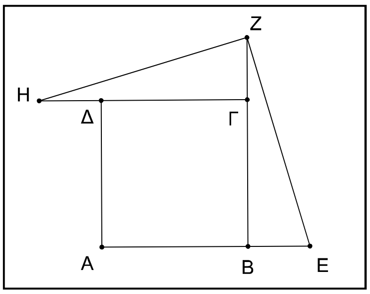
3. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

β) Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

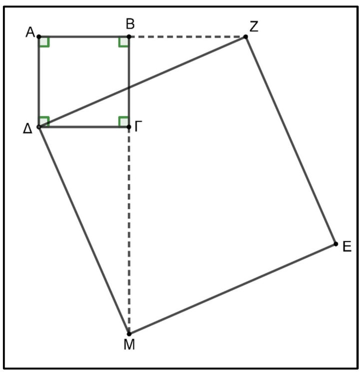
4. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $ΒΕ = ΓΖ = ΔΗ$.



α) Να αποδείξετε ότι $ΖΕ = ΖΗ$.

β) Να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Ζ}Η = 90^o$.

5. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΖ και την πλευρά ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα $ΓΜ = ΑΖ$. Θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔΜΕΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδείξετε ότι:

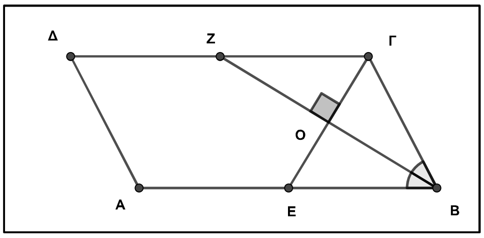


α) τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα και οι γωνίες $Α\hat{Δ}Ζ$ και $Γ\hat{Δ}Μ$ είναι ίσες,

β) το τετράπλευρο ΔΜΕΖ είναι τετράγωνο,

γ) οι γωνίες $B\hat{Z}E$ και $E\hat{M}B$ είναι παραπληρωματικές.

6. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος και η ΒΖ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Φέρουμε ΓΟ κάθετη στη ΒΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.



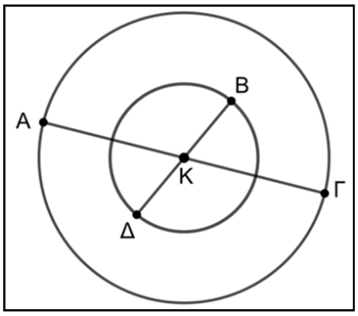
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΒΕ είναι ίσα.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ ώστε το τετράπλευρο ΕΒΓΖ να είναι τετράγωνο;

7. Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει $ΑΓ > ΒΔ$:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο,

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β και Μ το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ζ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $ΒΕ = ΕΔ$.

β) Να αποδείξετε ότι $ΒΕ // ΖΔ$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ώστε το τετράπλευρο ΔΕΒΖ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

9. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ προς το Β και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ, τότε:

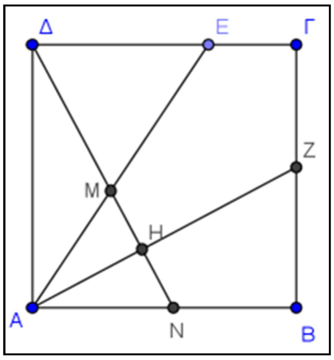
α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}A$ είναι ίσες ,

ii. τα τμήματα ΑΖ και ΔΕ είναι κάθετα.

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής Ρ των ΑΖ και ΔΕ είναι τέτοιο ώστε $ΡΒ = ΑΒ$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε στην προέκταση του τμήματος ΑΒ.

10. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ . Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ , η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν . Να αποδείξετε ότι:

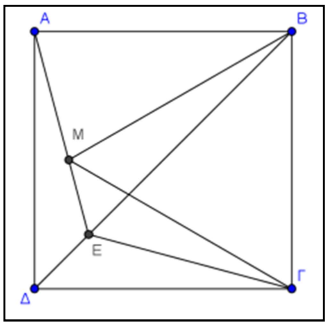


α) τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα,

β) $ΑΜ = ΑΝ$ και $ΔΕ = ΕΜ$,

γ) $ΑΕ = ΔΕ + ΒΖ$.

11. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ . Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Ε , να αποδείξετε ότι:

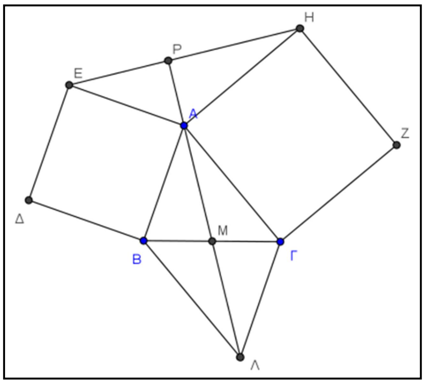


α) $Δ\hat{Α}Ε = 15^o$,

β) τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα ,

γ) η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Γ}Μ$.

12. Εκτός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ . Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Κ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο ώστε $ΑΜ = ΜΛ$, να αποδείξετε ότι:

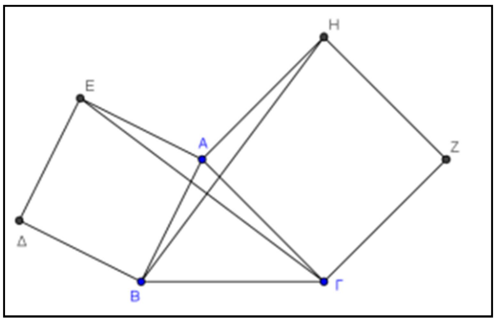


α) $ΓΛ = ΑΕ$,

β) οι γωνίες $Α\hat{Γ}Λ$ και $Ε\hat{Α}Η$ είναι ίσες ,

γ) η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ .

13. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ.



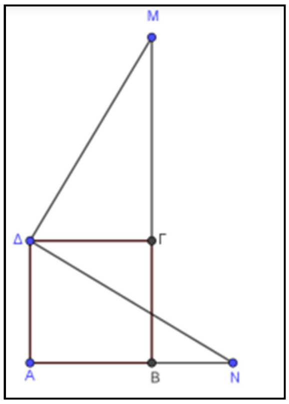
Να αποδείξετε ότι:

α) $Ε\hat{Α}Η = Α\hat{Β}Γ + Α\hat{Γ}Β$,

β) $ΕΓ = ΒΗ$,

γ) η ΕΓ είναι κάθετη στη ΒΗ .

14. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ κατά τμήμα ΒΝ και την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $ΓΜ = ΑΝ$.

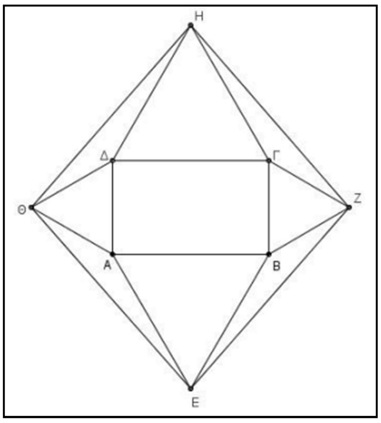


Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΝ = ΔΜ$,

β) $ΔΝ \perp ΔΜ$.

15. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, τότε το ΕΖΗΘ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.