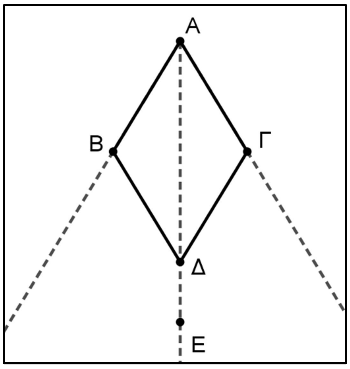
5.4 Ρόμβος

1. Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου του ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα),

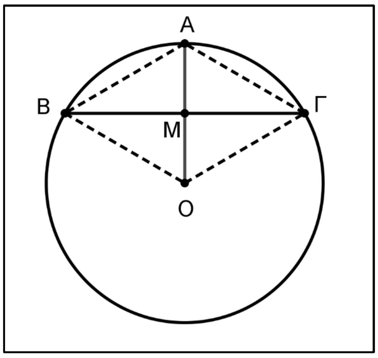
β) το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ.



2. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε ακτίνα ΟΑ και χορδή ΒΓ κάθετη στο μέσο της Μ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ .

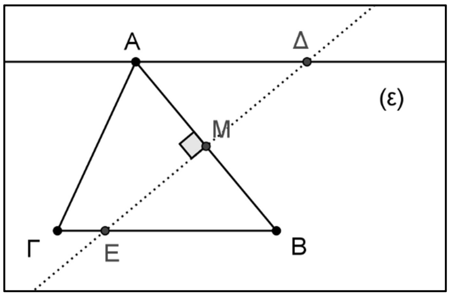


3. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΑ = ΔΒ$ και $ΕΑ = ΕΒ$.

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος.



4. Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

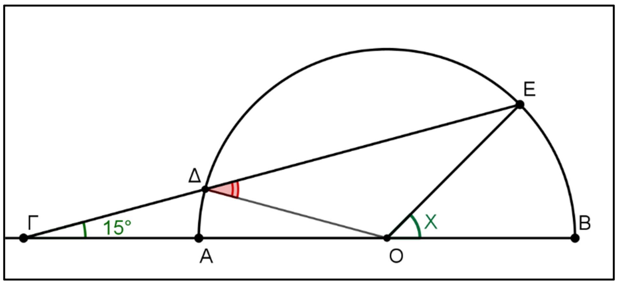
α) το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο,

β) το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.

5. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ είναι ίσο με το ΟΒ και η γωνία $Β\hat{Γ}Ε$ είναι 15^o , τότε

α) να αποδείξετε ότι $Ο\hat{Δ}Ε = 30^o$,

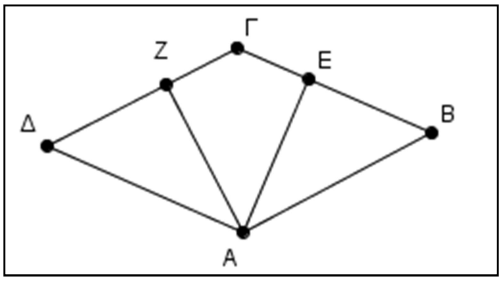
β) να υπολογίσετε τη γωνία $Ε\hat{Ο}Β = x$.



6. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι τα τμήματα ΑΖ και ΑΕ είναι κάθετα στις πλευρές ΔΓ και ΓΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε $AZ = AE$.

β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $AZ = AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.



7. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω Κ σημείο της ΒΓ τέτοιο ώστε $B\Delta = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές,

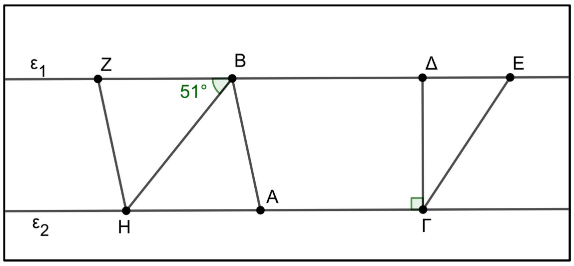
β) το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος.

8. Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι ρόμβος. Επίσης δίνεται ότι $Z\hat{B}H = 51^o$ και ότι η $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{B}H$.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{H}B$.

γ) Αν η γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56^o, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΓΔΕ.



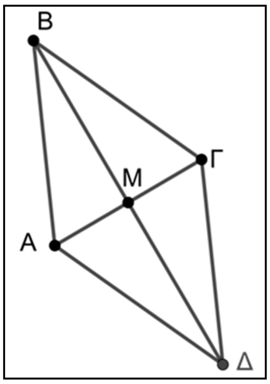
9. Στο σχήμα το Μ είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης $A\hat{M}B = \Gamma\hat{M}B$.

α) Να αποδείξετε ότι:

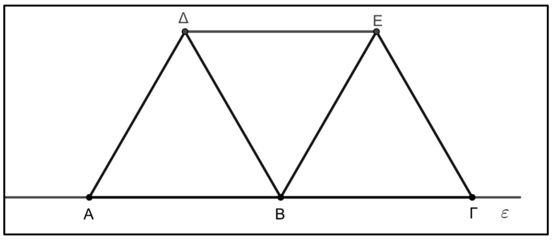
i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες,

ii. το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;



10. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β και Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

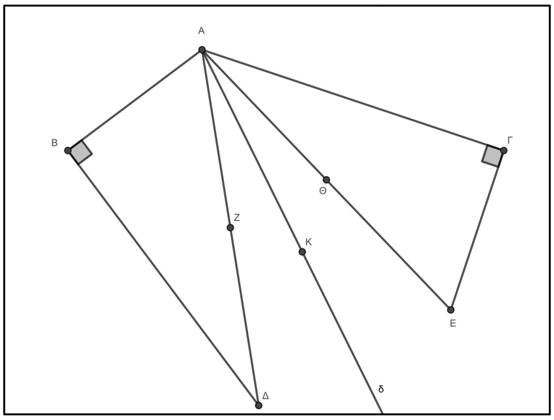


α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}E$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι ρόμβος.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα ΒΔ κάθετο στην ΑΒ με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓΕ κάθετο στην ΑΓ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Ζ και Θ των ΑΔ και ΑΕ καθώς και τη διχοτόμο Αδ της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.



α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$.

β) Αν Κ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Αδ, να αποδείξετε ότι ισαπέχει από τα μέσα Ζ και Θ.

γ) Αν το Κ είναι σημείο της διχοτόμου Αδ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΚΘ είναι ρόμβος.

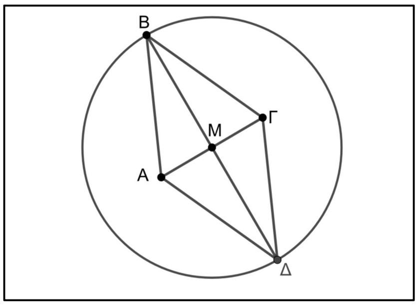
12. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημεία Κ, Λ της διαγωνίου του ΒΔ, τέτοια ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε και το ΑΚΓΛ είναι ρόμβος.

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου ΑΝΓΔ, ώστε το ΑΚΓΛ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

13. **α)** Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

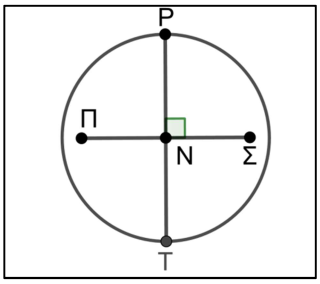
Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

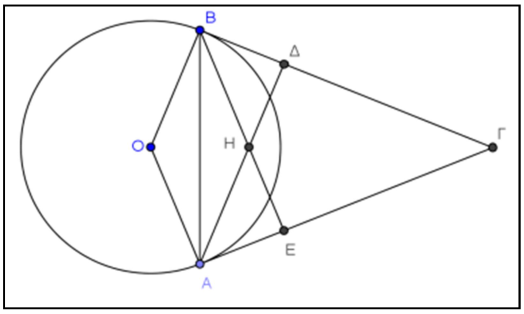
γ) Στο σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και $\Pi N = N\Sigma$.

Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν.

Να αποδείξετε ότι $\Pi P = P\Sigma = \Sigma T = T\Pi$.



14. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δύο μη αντιδιαμετρικά σημεία του Α και Β. Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ. Φέρουμε επίσης και τα ύψη ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τα οποία τέμνονται στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές,

β) το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι ρόμβος,

γ) τα σημεία Ο, Η και Γ είναι συνευθειακά.

15. Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις $Π_1$ και $Π_2$:

$Π_1$: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

$Π_2$: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις $Π_1$ και $Π_2$ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μία ενιαία πρόταση.