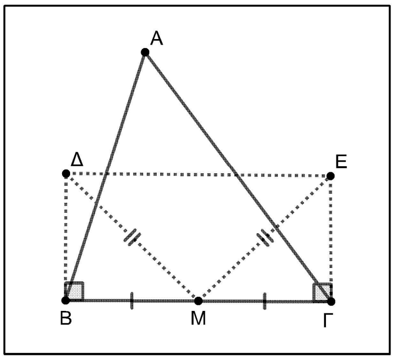
5.3 Ορθογώνιο

1. Στο σχήμα που ακολουθεί, το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, και τα τμήματα ΒΔ και ΕΓ είναι κάθετα στη ΒΓ στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $Μ\Delta = ΜΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα,

β) το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



2. Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες,

β) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Γ, Β και Δ είναι ορθογώνιο.

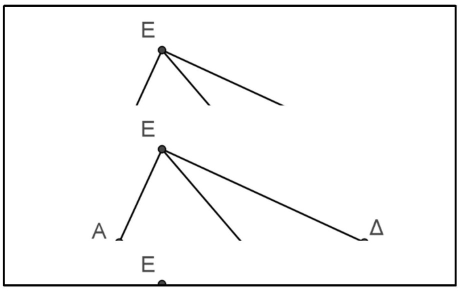
3. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ,

β) το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές,

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$.



4. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε τα μέσα Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $Μ\Delta = Μ\Gamma$.

β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ και Ν είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ.

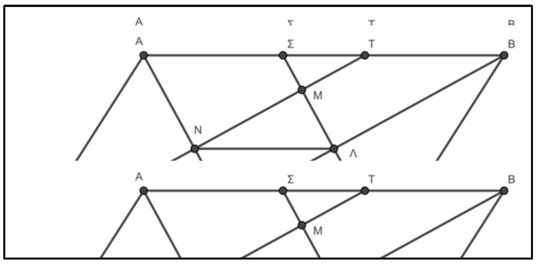
5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > Α\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΡ, ΒΕ, ΓΣ και ΔΤ (όπου Ρ, Ε στην ΔΓ και Σ, Τ στην ΑΒ) τέμνονται στα σημεία Κ, Λ, Μ και Ν όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔΕΒΤ είναι παραλληλόγραμμο,

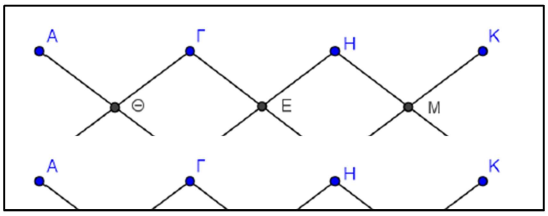
β) το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ορθογώνιο,

γ) $Λ Ν // ΑΒ$,

δ) $ΛΝ = ΑΒ - Α\Delta$.



6. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των



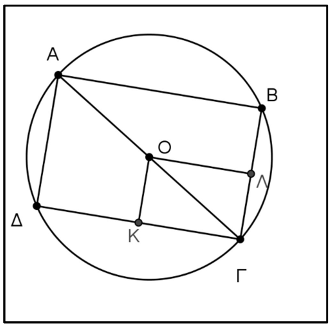
τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο,

β) τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά,

γ) το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

7. Έστω κύκλος κέντρου Ο και ΑΓ μια διάμετρός του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές ΑΔ, ΒΓ και χορδές ΔΓ, ΑΒ τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Έστω Κ και Λ τα μέσα των χορδών ΔΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:

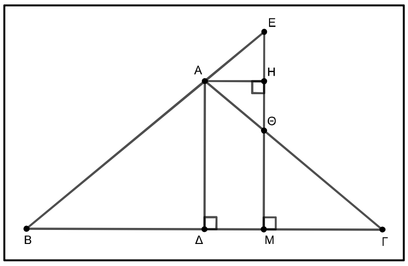
α) οι χορδές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες,

β) το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,

γ) η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου,

δ) το τετράπλευρο ΟΚΓΛ είναι ορθογώνιο.

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$, και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) $Δ\hat{Α}Η = 90^{o}$,

β) το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές,

γ) $ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ$.

9. Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, $ρ_1$) και (Λ, $ρ_2$) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες ΚΒ και ΛΜ τέμνονται σε σημείο, έστω Δ ,

ii. το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

β) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες $ρ_1$ και $ρ_2$ των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΛ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Στην προέκταση της διαμέσου ΑΔ προς το Δ παίρνουμε σημείο Ε, έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΓΔ είναι ίσα.

ii. η διάμεσος ΑΔ είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ που την περιέχουν.

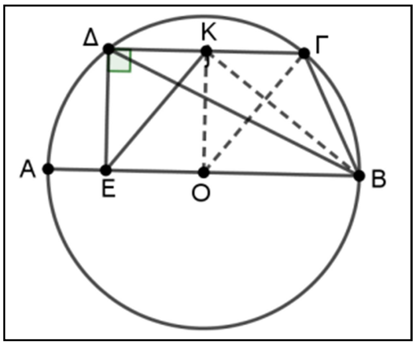
β) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ το διπλάσιο της διαμέσου ΑΔ ισούται με την πλευρά ΒΓ, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου ΑΒΕΓ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

11. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta // AB$ με Κ το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα ΔΕ κάθετο στη ΔΓ . Να αποδείξετε:

α) το τετράπλευρο ΚΓΟΕ είναι παραλληλόγραμμο,

β) $\Delta\hat{E}K = \dfrac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$,

γ) $KE < KB$.



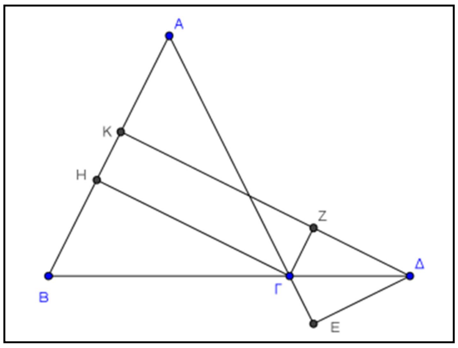
12. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ. Από το Δ φέρουμε ΔΚ κάθετη στην ΑΒ και ΔΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΓ. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓΗ κάθετη στην ΑΒ και ΓΖ κάθετη στην ΚΔ . Να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία $Z\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{B}$,

β) η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Gamma}E$,

γ) το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές ,

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$.

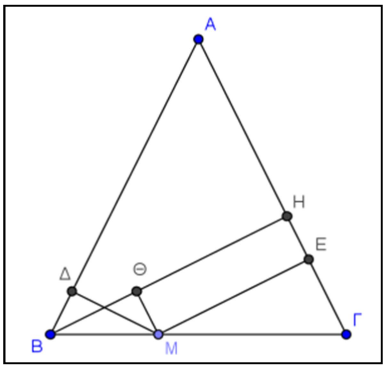


13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο Μ της βάσης του ΒΓ και το ύψος του ΒΗ . Από το Μ φέρουμε κάθετες ΜΔ , ΜΕ και ΜΘ στις ΑΒ , ΑΓ και ΒΗ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΜΕΗΘ είναι ορθογώνιο ,

β) $B\Theta = \Delta M$,

γ) $M\Delta + ME = BH$.

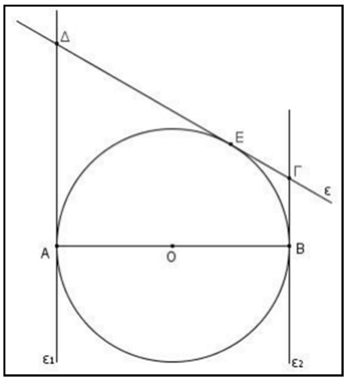


14. Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΑΒ και ευθείες ε_1 , ε_2 εφαπτομένες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε, εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ .



15. Έστω ε_1 , ε_2 δύο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο Ο και τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του Μ ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

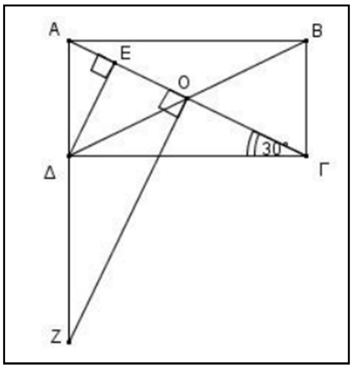
i. $OM = OM_1$,

ii. τα σημεία Μ , Ο και M_2 είναι συνευθειακά ,

iii. το τρίγωνο $ΜΜ_1Μ_2$ είναι ορθογώνιο .

β) Αν $Μ_3$ είναι το συμμετρικό σημείο του $Μ_2$ ως προς την $ε_1$, τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $ΜΜ_1Μ_2Μ_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $Δ\hat{Γ}Α = 30^o$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $Α\hat{Δ}Γ$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες .

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο, η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα .

17. Θεωρούμε ευθεία $(ε)$ και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την $(ε)$ έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω $Α'$ και $Β'$ τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία $(ε)$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΑ' // ΒΒ'$.

β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία $(ε)$ στο σημείο Κ , να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του $Α'Β'$.

γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας ΑΒ με την ευθεία $(ε)$ ώστε το τετράπλευρο $ΑΒΒ'Α'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.