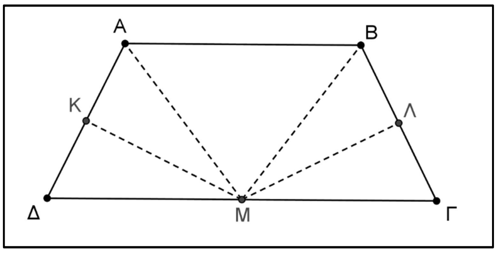
5.10 – 5.11 Τραπέζια

1. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $ΑΒ = 8$ και $ΔΓ = 12$. Αν ΑΗ και ΒΘ είναι τα ύψη του τραπεζίου ΑΒΓΔ,

α) να αποδείξετε ότι $ΔΗ = ΘΓ$,

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου.

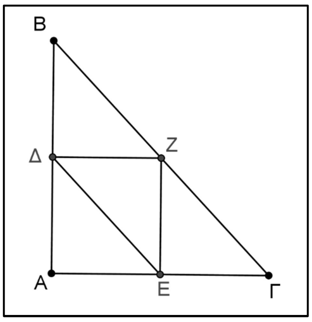
2. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ ($ΑΒ//ΔΓ$ και $ΑΔ = ΒΓ$), το μέσο Μ της πλευράς ΔΓ και τα μέσα Κ και Λ των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα,

β) τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα.

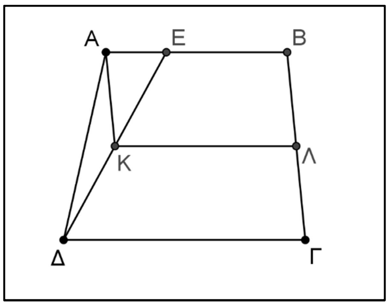
3. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^o\right)$ θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι τετράγωνο,

β) το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

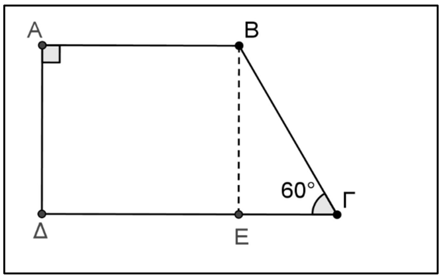
4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ//ΓΔ)$ με $ΑΒ = 3$, $ΓΔ = 4$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε $ΑΕ = 1$. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα .



α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.

5. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ), με $ΑΒ = ΒΓ = 4$, $\hat{Α} = 90^o$ και $\hat{Γ} = 60^o$. Φέρουμε το ύψος ΒΕ από τη κορυφή Β.

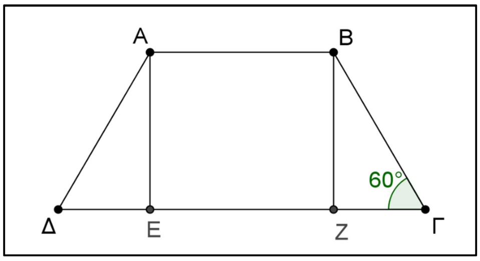


α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι $2ΕΓ = ΒΓ$.

γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ.

6. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με $ΑΒ = 6$, $ΒΓ = 4$ και $\hat{Γ} = 60^o$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.



α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

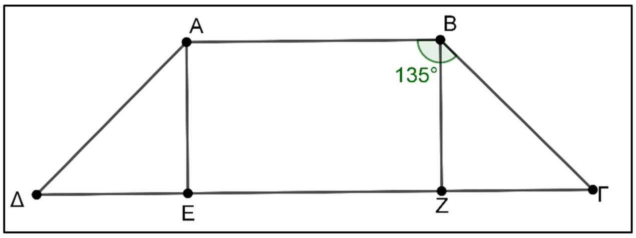
β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΒΖΓ είναι ίσα.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.

7. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ//ΓΔ)$ με $ΓΔ > ΑΒ$ και $\hat{Β} = 135^{o}$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

β) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΕΔ = ΒΖ = ΓΖ$.

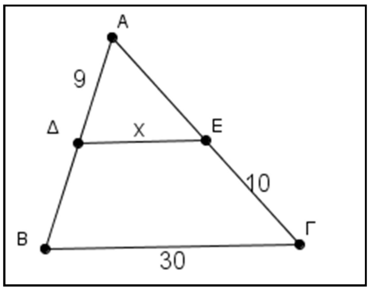


8. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $ΑΔ = 9$, $ΕΓ = 10$ και $ΒΓ = 30$.

α) Να υπολογίσετε: **i.** το μήκος x του τμήματος ΔΕ,

ii. την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.



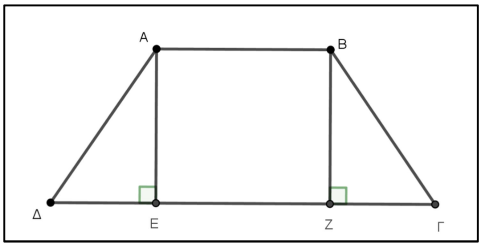
9. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ//ΓΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε $ΑΕ = ΕΖ = ΖΒ$ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΖ = ΓΕ$,

β) τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή.

10. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ//ΓΔ)$. Από τα σημεία Α και Β φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΑΕ και ΒΖ αντίστοιχα στη ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΕ = ΓΖ$, **β)** $ΑΖ = ΒΕ$.

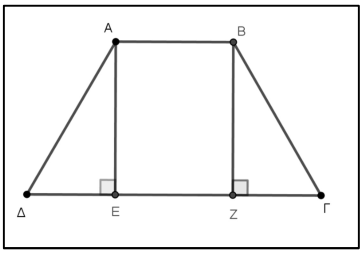


11. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ//ΓΔ)$ με $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 60^{o}$ και τα κάθετα τμήματα ΑΕ, ΒΖ στη ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

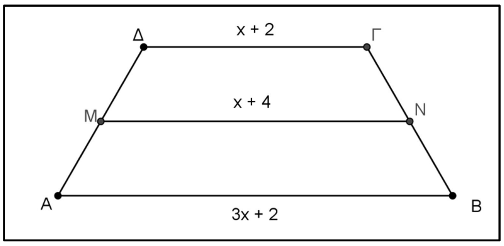
α) $ΔΕ = ΓΖ$,

β) το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ορθογώνιο.



12. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ//ΓΔ \text{ και } ΑΔ = ΒΓ)$, με $ΑΒ > ΓΔ$ και ΜΝ η διάμεσός του.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $ΑΒ = 3x + 2$, $ΓΔ = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι $ΜΝ = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$.

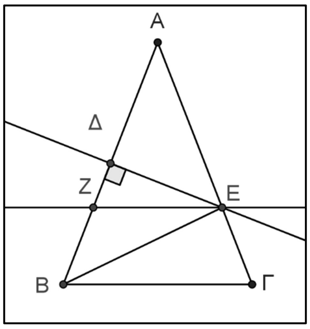


β) Αν η γωνία $\hat{Γ}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{Β}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

13. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΕ = ΒΕ$,

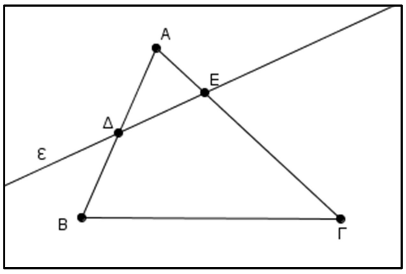
β) το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



14. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ και σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ .

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του ΑΒΓ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

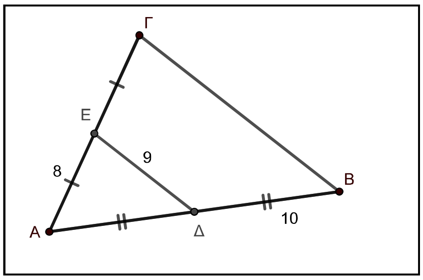


15. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $ΑΕ = 8$, $ΕΔ = 9$, $ΔΒ = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

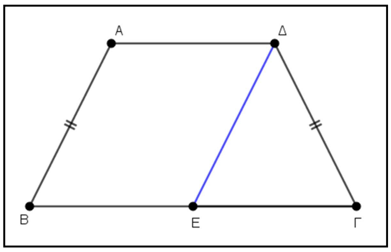
γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ.



16. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ > ΔΓ. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ = ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι διχοτόμος της $Α\hat{Δ}Γ$.

β) Αν $\hat{Α} = 120^o$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισόπλευρο.



17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ,ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) οι γωνίες $Η\hat{Δ}Ζ$ και $Η\hat{Ε}Ζ$ είναι ίσες .

γ) οι γωνίες $Ε\hat{Δ}Ζ$ και $Ε\hat{Η}Ζ$ είναι ίσες.

18. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και ΑΔ διάμεσος. Στο τμήμα ΑΔ θεωρούμε τυχαίο σημείο Κ από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα ΚΖ και ΚΕ κάθετα στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΓ και ΚΖΕ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχείρημα:

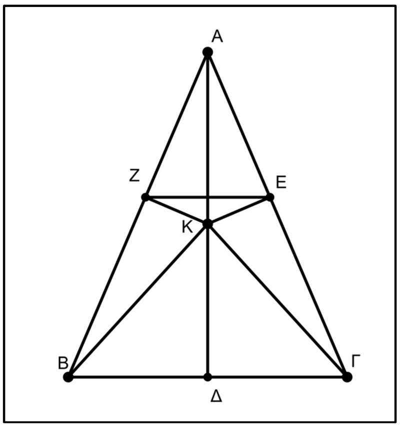
«*Το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και μεσοκάθετος του ΒΓ. Οπότε και το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές. Τα τρίγωνα ΑΒΚ, ΑΓΚ έχουν:*

1) $ΒΚ = ΚΓ$,

2) $Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Κ$ *επειδή ΑΚ διχοτόμος της* $\hat{Α}$,

3) $Α\hat{Β}Κ = Α\hat{Γ}Κ$ *ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.*

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία – Πλευρά – Γωνία.»



Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία – Πλευρά – Γωνία διατηρώντας τις πλευρές ΒΚ και ΚΓ.

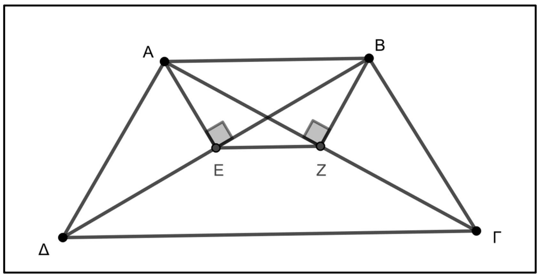
19. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΔ και η ΒΔ είναι κάθετη στην ΒΓ. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ε και Ζ των ΓΔ, ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΕ = ΜΖ$, **β)** η ΜΖ είναι κάθετη στην ΑΓ ,

γ) τα τρίγωνα ΜΔΕ και ΜΖΓ είναι ίσα , **δ)** η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΕΖ.

20. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ//ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ = ΑΒ$. Φέρουμε τμήματα ΑΕ και ΒΖ κάθετα στις διαγώνιες ΒΔ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) τα σημεία Ζ και Ε είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα ,

β) $ΑΕ = ΒΖ$,

γ) το τετράπλευρο ΑΕΖΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

δ) η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$.

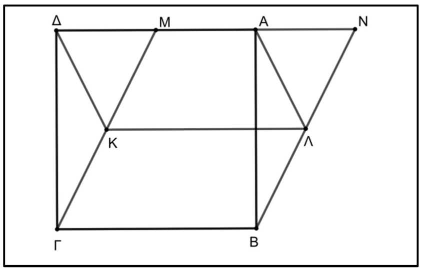
21. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > ΒΓ$ και $\hat{Β} < 90^o$ θεωρούμε σημείο Ζ στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $ΓΖ = ΒΓ$. Αν Ε είναι σημείο της ΑΒ, τέτοιο ώστε $ΕΓ = ΓΒ$, να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία ΒΕΖ είναι ορθή,

β) το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

γ) το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

22. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΑ . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔΑ (προς την πλευρά του Α) κατά τμήμα $ΑΝ = \frac{ΑΔ}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓΜ και ΒΝ και θεωρούμε τα μέσα τους Κ και Λ αντίστοιχα.



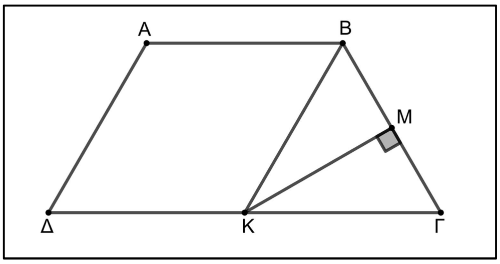
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΜΝΒΓ είναι παραλληλόγραμμο,

β) το τετράπλευρο ΑΔΚΛ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) το τετράπλευρο ΑΜΚΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

23. Έστω ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ\left(ΑΒ//ΓΔ\right)$ με $\hat{Β} = 2\hat{Γ}$ και $ΑΒ = ΒΓ = ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Β}$, η οποία τέμνει το ΔΓ στο Κ και η κάθετη από το Κ προς το ΒΓ το τέμνει στο Μ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ΑΒΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι: **i.** το τετράπλευρο ΑΒΚΔ είναι ρόμβος. **ii.** το σημείο Μ είναι το μέσο του ΒΓ.

24. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα $ΒΕ = ΑΒ$ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα $ΔΖ = ΑΔ$.

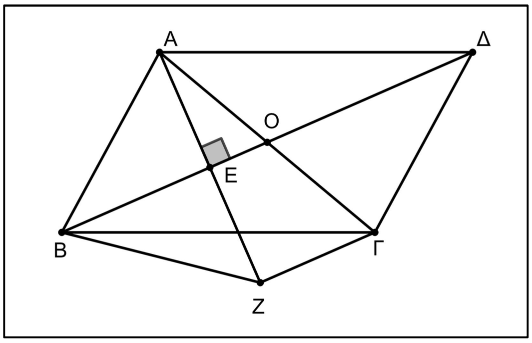
α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα ,

ii. τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά.

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε $ΚΛ // ΔΒ$ και $ΚΛ = \frac{3}{2}ΔΒ$.

25. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ < ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ. Φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ. Αν το Ζ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την διαγώνιο ΒΔ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ, τότε να αποδείξετε ότι:

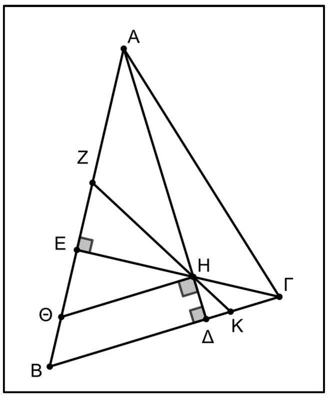


α) το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές,

β) $ΖΓ = 2ΟΕ$,

γ) το ΒΔΖΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

26. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία $\hat{Β} = 60^o$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Η. Φέρνουμε ΚΖ διχοτόμο της γωνίας $Ε\hat{Η}Α$ και ΘΗ κάθετο στο ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

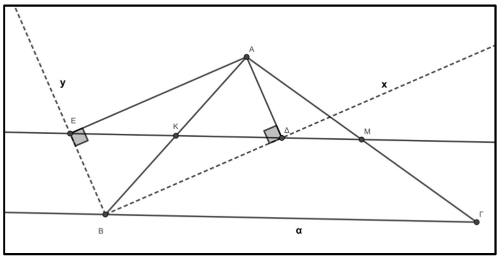


α) για το τμήμα ΖΕ ισχύει $ΖΗ = 2ΕΖ$,

β) το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισόπλευρο,

γ) το τετράπλευρο ΘΗΚΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

27. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος Βx της γωνίας $\hat{Β}$ του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας $\hat{Β}$. Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

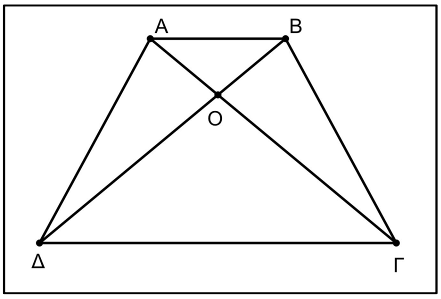


α) το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο,

β) η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ,

γ) το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3α}{4}$, όπου $α = ΒΓ$.

28. Στο παρακάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν: $ΑΔ = ΒΓ$, $ΑΓ = ΒΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$.

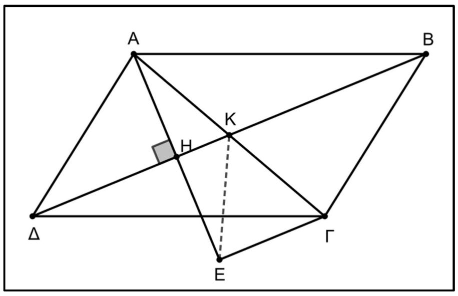


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι $Δ\hat{Α}Β = Α\hat{Β}Γ$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

29. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε ΑΗ κάθετη στην ΒΔ και στην προέκταση της ΑΗ (προς το Η) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε: $ΑΗ = ΗΕ$. Να αποδείξετε ότι:

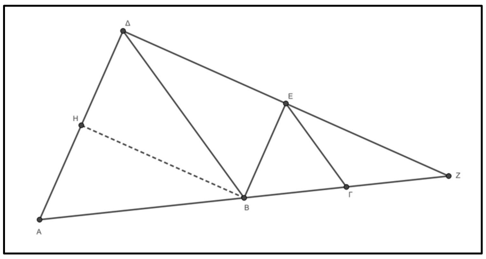


α) το τρίγωνο ΑΚΕ είναι ισοσκελές,

β) το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο,

γ) το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

30. Σε μια ευθεία (ε) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε $AB = 2B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΔ και η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι:



α) το τετράπλευρο ΒΗΔΕ είναι ορθογώνιο,

β) το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές,

γ) το τετράπλευρο ΗΕΓΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

31. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^o\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές,

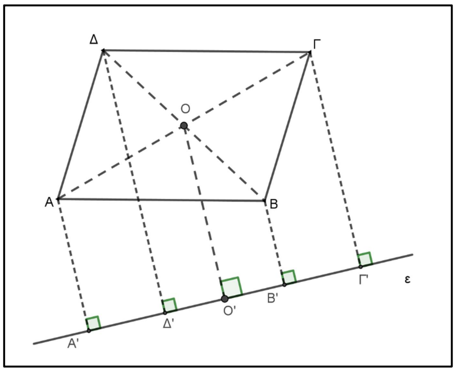
β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα,

γ) η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων ΑΕ και ΖΓ,

δ) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

32. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές A', B', Γ', Δ' και O' των κορυφών του Α, Β, Γ, Δ και του κέντρου του O αντίστοιχα, σε μία ευθεία ε.

α) Αν η ευθεία (ε) αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο (όπως στο σχήμα που ακολουθεί) και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:



i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση OO' του κέντρου Ο του παραλληλογράμμου από την (ε) είναι ίση με

ii. Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$.

β) Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις AA', BB', $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

33. Δίνεται ευθεία (ε) και δυο σημεία Α, Β εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Φέρουμε ΑΔ, ΒΓ κάθετες στην (ε) και Μ, Ν μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

α) Αν τα Α, Β είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε),

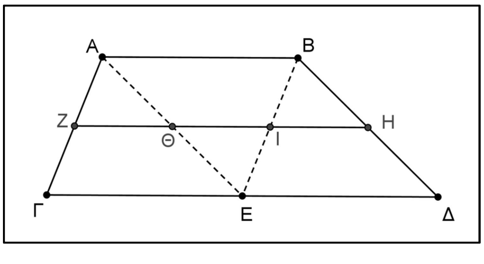
i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1. $A\Delta < B\Gamma$ **2.** $A\Delta = B\Gamma$

ii. να εκφράσετε το τμήμα ΜΝ σε σχέση με τα τμήματα ΑΔ, ΒΓ στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.

β) Αν η ευθεία (ε) τέμνει το τμήμα ΑΒ στο μέσο του Μ, να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο), αιτιολογώντας την απάντησή σας.

34. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB//\Gamma\Delta)$ είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης, τα σημεία Ζ, Η και Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να δείξετε ότι:

i. τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα, **ii.** $ZH = \frac{3}{2}AB$.

35. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο του τμήματος ΒΔ . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΖΔ είναι ίσα,

β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$,

γ) το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

36. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(AB < A\Gamma\right)$ φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.

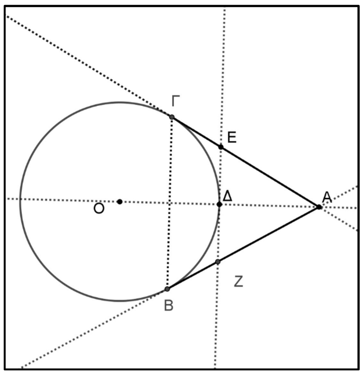
Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Lambda // B\Gamma$,

β) **i.** $M\Lambda = K\Delta$, **ii.** Το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

γ) Οι γωνίες $K\hat{\Delta}\Lambda$ και $K\hat{M}\Lambda$ είναι ίσες.

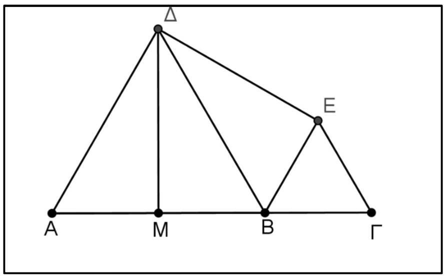
37. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Από σημείο Α εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία Β, Γ και τέτοιες ώστε, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ να είναι 60^o .Έστω ότι η ευθεία ΑΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ζ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) $OA = 2\rho$, **β)** το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο,

γ) $AZ = 2ZB$, **δ)** το τετράπλευρο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

38. Έστω Α, Β και Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2B\Gamma$. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίπεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ. Να αποδείξετε ότι:

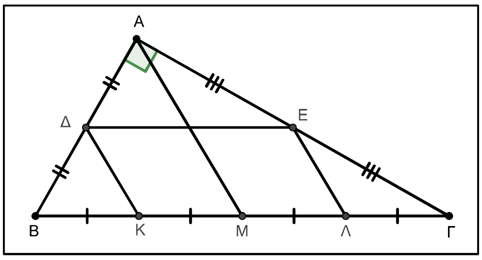


α) το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα ΑΔ και ΒΕ

β) τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα,

γ) $\Delta\hat{M}B + \Delta\hat{E}B = 180^o$.

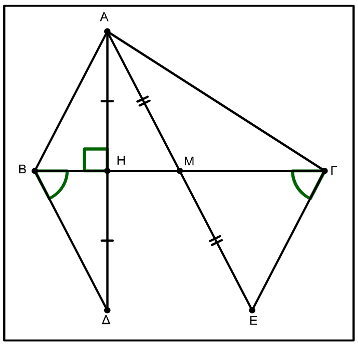
39. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^o$. Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε τα σημεία Κ, Μ, Λ ώστε $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



α) το τετράπλευρο ΔΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο ,

β) το τετράπλευρο ΚΔΑΜ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3}{8}B\Gamma$.

40. Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΗ κατά τμήμα $Η\Delta = ΑΗ$ και τη διάμεσό του ΑΜ κατά τμήμα $ΜΕ = ΑΜ$.



Να αποδείξετε ότι:

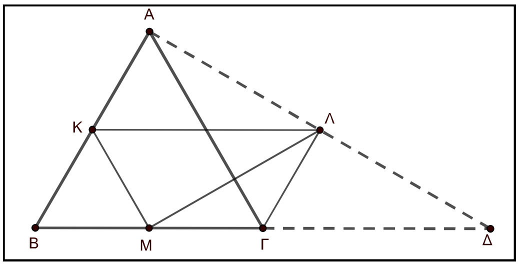
α) **i.** $ΑΒ = ΓΕ$, **ii.** $ΑΒ = Β\Delta$.

β) $\Gamma\hat{Β}\Delta = Β\hat{\Gamma}Ε$.

γ) **i.** Εξετάστε αν το τμήμα ΒΔ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓΕ.

ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

41. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = Β\Gamma$. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή,

ii. το τρίγωνο ΚΜΛ είναι ορθογώνιο.

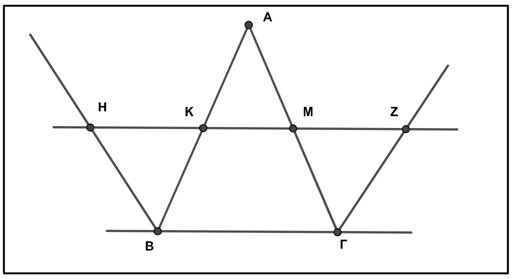
42. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΒ > Α\Delta$. Στην ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΑΕ = Α\Delta$. Από το μέσο Μ της ΔΕ φέρουμε παράλληλη προς την ΔΓ που τέμνει την ΒΓ στο Κ.

α) Να αποδείξετε $ΑΜ \perp \Delta Ε$.

β) Να αποδείξετε ότι $2ΜΚ = 2ΑΒ - Α\Delta$.

γ) Φέρνουμε την ΕΚ που τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι $\Gamma Ζ = ΑΒ - Α\Delta$.

43. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = Α\Gamma)$, με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

44. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = Α\Gamma$ και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε $ΒΚ \perp Β\Gamma$ έτσι ώστε $ΒΚ = Α\Gamma$ (το σημείο Κ είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α).

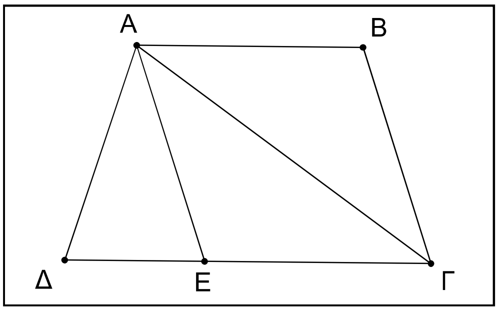
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΜ // ΒΚ$ και $ΑΒ = ΒΚ$.

β) Να δείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $Β\hat{Α}Μ$.

γ) Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Κ}Α = 45^{o} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

δ) Μπορεί το τετράπλευρο ΑΒΚΜ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

45. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ//ΓΔ$ και $\hat{Α}=108^o$. Στη βάση ΓΔ θεωρούμε σημείο Ε , ώστε οι ΑΓ, ΑΕ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{Α}$.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές,

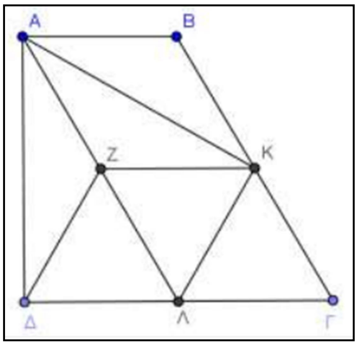
ii. το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι ρόμβος.

46. Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $ΑΒ > ΒΓ$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60^o . Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι: **i.** το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου, **ii.** $ΑΜ=\frac{1}{4}ΑΓ$.

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

47. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $ΑΒΓΔ\left(\hat{Α}=\hat{Δ}=90^o\right)$ με $ΒΓ=ΓΔ=2ΑΒ$ και Κ, Λ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Η παράλληλη από το Κ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΛ στο Ζ . Να αποδείξετε ότι:



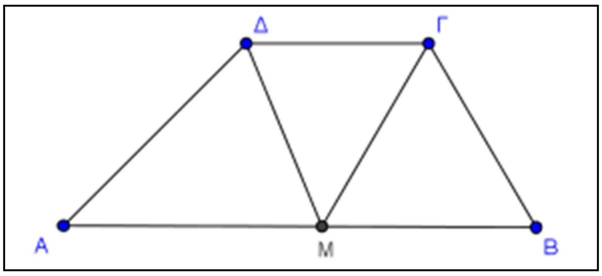
α) το Ζ είναι μέσο του ΑΛ ,

β) $ΒΓ=2ΔΖ$,

γ) το τετράπλευρο ΖΚΓΛ είναι ρόμβος ,

δ) $Α\hat{Κ}Λ=90^o$.

48. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΒ//ΓΔ$ και $ΑΒ=ΑΔ+ΒΓ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ , να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές,

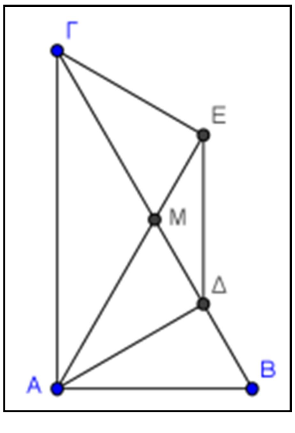
β) το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές,

γ) η ΓΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$ του τραπεζίου.

49. **α)** Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ θεωρούμε Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.

β) Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος, το ΑΒΓΔ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

50. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α}=90^o$ και $\hat{Γ}=30^o$. Φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διάμεσό του ΑΜ . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΑΜ , η οποία την τέμνει στο Ε . Να αποδείξετε ότι:

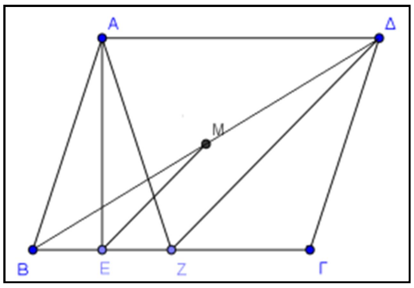


α) το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο ,

β) $ΜΕ=ΜΔ=\frac{ΒΓ}{4}$,

γ) το ΑΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο .

51. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70^o και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $ΒΕ = ΕΖ$.

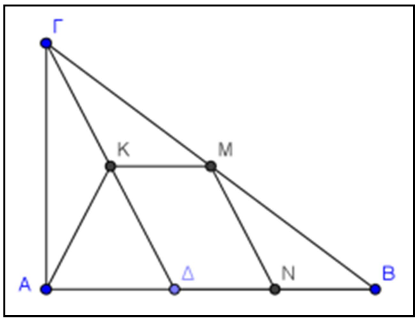


α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου ΑΖΓΔ.

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $ΕΜ = \frac{ΑΓ}{2}$.

52. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^o$ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ, Μ, Ν τα μέσα των ΓΔ, ΒΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

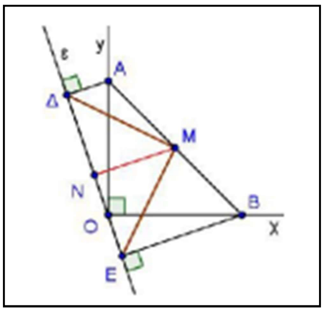


α) το τετράπλευρο ΚΜΝΔ είναι παραλληλόγραμμο,

β) το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο,

γ) η διάμεσος του τραπεζίου ΑΚΜΝ είναι ίση με $\frac{ΑΒ}{2}$.

53. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και τα σημεία Α και Β των ημιευθειών Oy και Ox αντίστοιχα με $ΟΑ = ΟΒ$. Μια ευθεία $(ε)$ η οποία δεν είναι παράλληλη στην ΑΒ διέρχεται από το Ο ώστε τα σημεία Α και Β να είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετη από το Α στην $(ε)$ την τέμνει στο Δ και η κάθετη από το Β στην $(ε)$ την τέμνει στο Ε. Να αποδείξετε ότι:



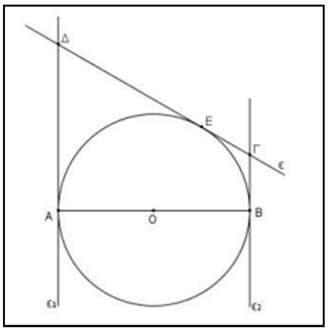
α) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΕΒ είναι ίσα,

β) $ΑΔ + ΒΕ = ΔΕ$.

γ) $ΜΝ = \frac{ΔΕ}{2}$, όπου Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΔΕ αντίστοιχα.

δ) το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

54. Δίνεται κύκλος $(Ο, R)$ με διάμετρο ΑΒ και ευθείες $ε_1$, $ε_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Ε, η οποία τέμνει τις $ε_1$ και $ε_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ανάλογα με τη θέση του σημείου Ε στο ημικύκλιο ΑΒ.

55. Θεωρούμε τραπέζιο, τέτοιο ώστε $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$, $ΑΒ = \frac{1}{4}ΔΓ$, $ΑΒ = \frac{1}{3}ΑΔ$. Επιπλέον, φέρουμε $ΒΕ \perp ΔΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

γ) Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ΑΓ διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΚ.

56. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(ΑΒ // ΓΔ)$ είναι $ΑΒ = ΑΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος .

γ) Αν επιπλέον είναι $B\hat{A}\Delta = 120^o$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ .

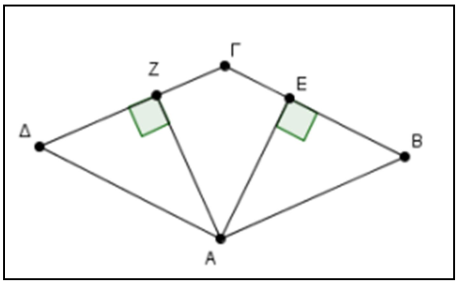
57. Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες ε_1 , ε_2 εφαπτομένες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ . Έστω ότι, μια Τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του Ε και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου ΑΒ , να αποδείξετε ότι:

i. τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο , **ii.** $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσο του τόξου ΑΒ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

58. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$. Να αποδείξετε ότι:

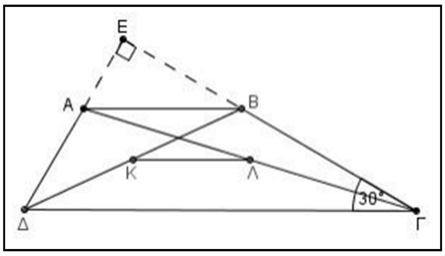


α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΕ είναι ισοσκελές .

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΖΕ .

γ) Αν Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΜΝ // ΖΕ και $ZM = EN$.

59. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) με τη γωνία $\hat{\Gamma} = 30^o$ και έστω Κ , Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔΑ και ΓΒ προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο Ε .



α) Να αποδείξετε ότι: $AB = 2AE$.

β) Να αποδείξετε ότι: $K\Lambda = A\Delta$.

γ) Σε ποια περίπτωση το ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

60. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δύο σημεία Α και Β εκτός αυτής , τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία ΑΒ να μην είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των Α και Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε).

α) Να αποδείξετε ότι $AA' // BB'$.

β) Αν η μεσοκάθετος του ΑΒ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ , να αποδείξετε ότι το Κ ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$.

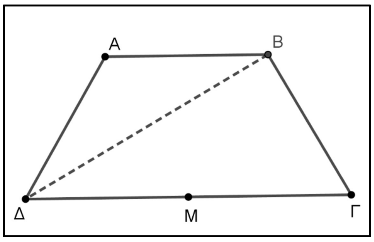
γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας ΑΒ με την ευθεία (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

61. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB // \Gamma\Delta)$ με $AB > \Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραπεζίου ΑΒΓΔ ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ με βάση ΑΒ. Αν Μ είναι το μέσο της βάσης ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΕΓ είναι ίσα.

β) Η διάμεσος ΕΜ του τριγώνου ΕΔΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{E}B$.

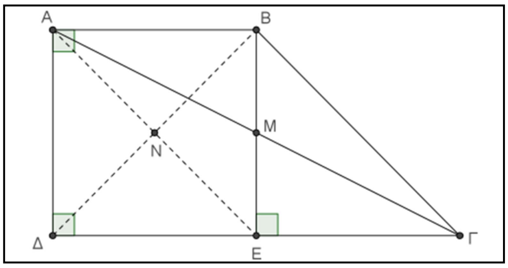
62. Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $AB = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta} = 60^o$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) η διαγώνιος ΔΒ του τραπεζίου είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$,

β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

63. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB//\Gamma\Delta)$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^o$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Μ. Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ν. Να αποδείξετε ότι:



α) $\hat{\Gamma} = 45^o$,

β) το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο,

γ) $A\Gamma \perp B\Delta$.

64. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ $(AB//\Gamma\Delta)$ είναι $AB = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$.

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΕΔ να είναι ρόμβος.

γ) Αν, επιπλέον, ισχύει ότι $B\hat{A}\Delta = 120^o$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο Ο, να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΕΟΒΓ.

65. Δίνεται κύκλος (O,R) με διάμετρο ΑΒ και δύο ευθείες ε_1, ε_2 εφαπτομένες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου ΑΒ. Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του Ε και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο Ε δεν είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, να αποδείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο,

ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

β) Αν το σημείο Ε βρίσκεται στο μέσο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΔΓΒ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.