

4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών – Ευκλείδειο αίτημα

4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

1. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα,

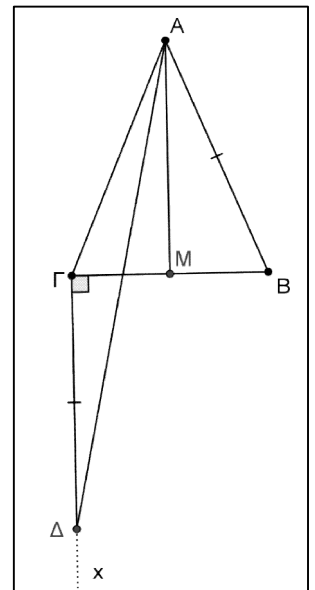
β) $ΕΔ // ΒΓ$.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και το ύψος του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία Γχ κάθετη στη ΒΓ, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α, και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $ΓΔ = ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία $\widehat{ΔΑΓ}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{ΓΔΑ}$,

β) $ΓΔ // ΑΜ$,

γ) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ΜΑΓ}$.



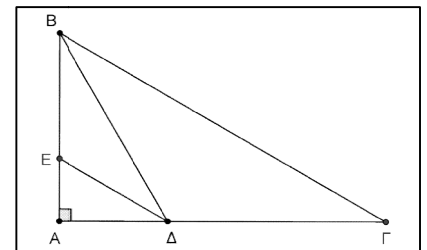
3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{Α} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $\widehat{ΑΔΒ}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{ΕΔΒ} = \widehat{ΔΒΓ}$ και $\widehat{ΕΔΑ} = \widehat{Γ}$,

ii. το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.

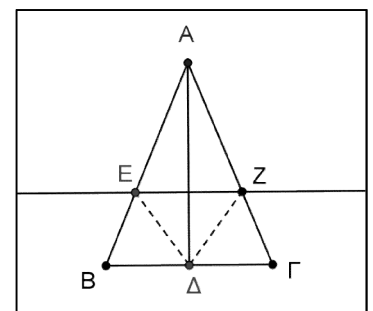
β) Αν είναι $\widehat{ΑΔΒ} = 60^\circ$, τότε να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{Γ}$.



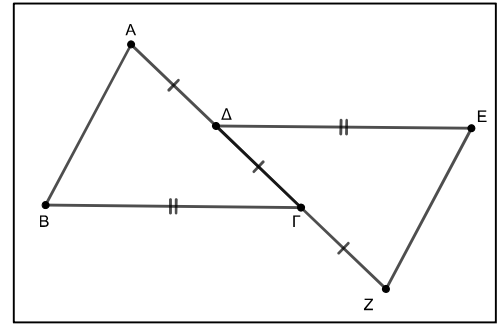
4. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές,

β) τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα.

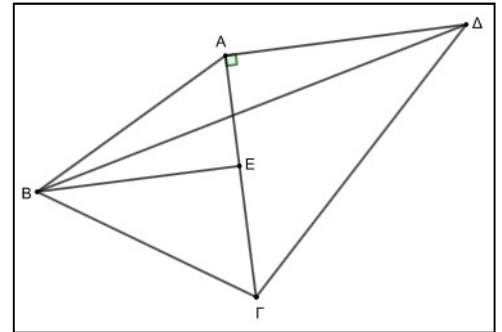


5. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς AG . Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την AG προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:



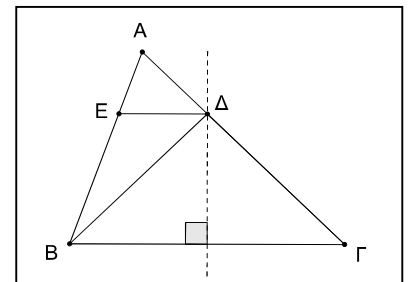
- α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZED είναι ίσα,
β) $AB \parallel EZ$.

6. Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του BE . Εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ με υποτείνουσα τη $\Gamma\Delta$ έτσι, ώστε τα σημεία B και Δ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας AG . Να αποδείξετε ότι:



- α) $BE \parallel A\Delta$.
β) οι γωνίες $EB\Delta$ και $A\Delta B$ είναι ίσες.
γ) το τρίγωνο $BA\Delta$ είναι ισοσκελές.

7. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AG στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:



- α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές,
β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.

8. Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία $x'x$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας Ax . Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

- α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R) ,
β) η διχοτόμος της γωνίας BMx είναι κάθετη στη MO ,
γ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας BMx .

9. Έστω ότι οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB .

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι ευθείες $x'x$ και $y'y$ είναι παράλληλες.

β) οι διχοτόμοι των γωνιών \widehat{BAx} και $\widehat{AB\gamma}$ τέμνονται σε σημείο Μ.

γ) το σημείο Μ είναι το μέσο του ημικυκλίου ΑΒ.

δ) αν η διχοτόμος της γωνίας ΒΑx τέμνει την $\gamma\gamma'$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας ΑΒγ τέμνει την $x'x$ στο σημείο Δ, τότε $ΜΓ = ΜΔ$.

10. Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ).

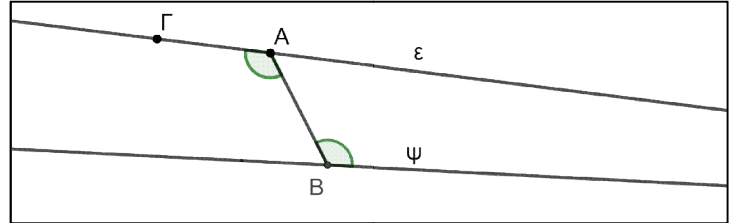
α) Αν η γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{AB\psi}$:

i. Να αποδείξετε ότι $\widehat{BA\epsilon} + \widehat{AB\psi} < 180^\circ$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

γ) Αν ισχύει $\widehat{BA\Gamma} < \widehat{AB\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η ΑΒ βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

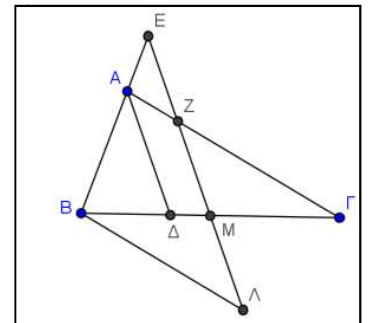


11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία (ε) παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή,

β) $ΒΛ = ΓΖ$,

γ) $ΑΕ = ΑΓ - ΒΛ$.

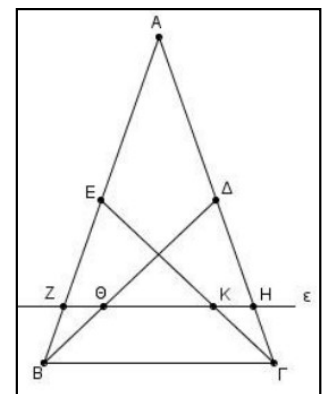


12. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) φέρουμε τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ. Μία ευθεία ε, παράλληλη στη βάση ΒΓ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα και τις διαμέσους ΒΔ και ΓΕ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ = ΓΗ$,

β) τα τρίγωνα ΖΒΘ και ΗΚΓ είναι ίσα,

γ) $ZK = ΗΘ$.



13. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AG . Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα EZ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

i. Οι γωνίες $\hat{\Delta E Z}$ και $\hat{A B \Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.

ii. Οπότε $\hat{\Delta E Z} = \hat{A B \Gamma}$.

iii. Τα τρίγωνα $\Delta E Z$ και $A B \Gamma$ είναι ίσα.

iv. Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα $A \Gamma$.

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3.

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\hat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα $A \Gamma$ και ΔZ για τα διάφορα είδη της γωνίας \hat{B} και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

