3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

3.12 Τριγωνική ανισότητα

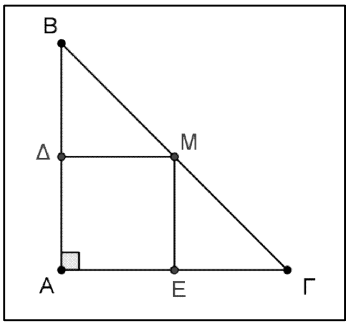
1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι ΜΔ = ΜΕ, τότε:

i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα,

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν είναι ΑΒ = ΑΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ.

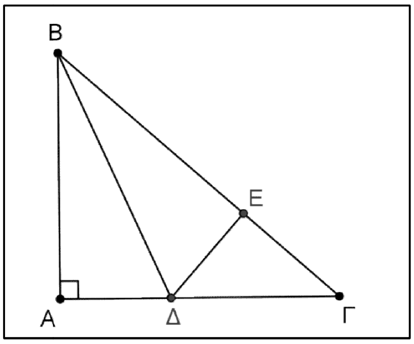


2. Στο σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\hat{B}$. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας και η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΔΕ ,

β) ΑΔ < ΔΓ,

γ) ΑΓ > ΑΒ .

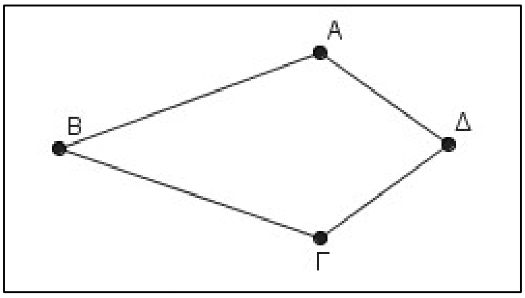


3. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$,

β) το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές,

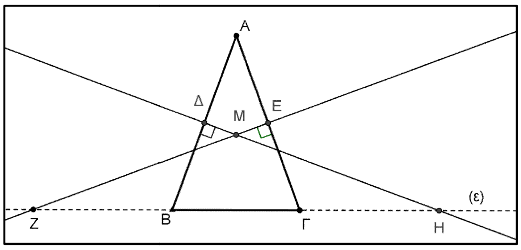
γ) η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.



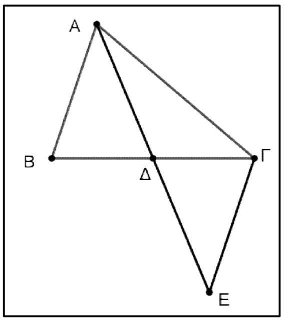
4. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και τα μέσα Δ, Ε των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Έστω ότι οι μεσοκάθετες ευθείες των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τέμνονται στο Μ και οι οποίες τέμνουν τον φορέα (ε) της βάσης ΒΓ στα σημεία Η και Ζ.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.



5. Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε ΔΕ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:



α) ΑΒ = ΓΕ ,

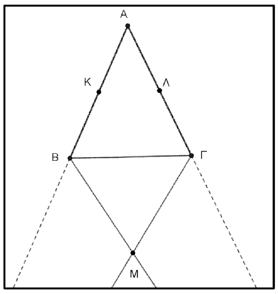
β) ΑΕ < ΑΒ + ΑΓ.

6. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΑΒ.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ})$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{\text{Β}}$ και $\hat{\text{Γ}}$ τέμνονται στο σημείο Μ και τα σημεία Κ και Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:



α) το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με ΜΒ = ΜΓ,

β) ΜΚ = ΜΛ .

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\text{Α}} = 90^\circ\right)$, η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\text{Γ}}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ σε σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ μια κάθετη ευθεία, η οποία τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ = ΔΕ,

β) ΑΔ < ΔΒ.

9. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ})$ παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 2ΑΔ, και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε, ώστε ΕΓ= 2ΑΕ. Το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ είναι ίσα,

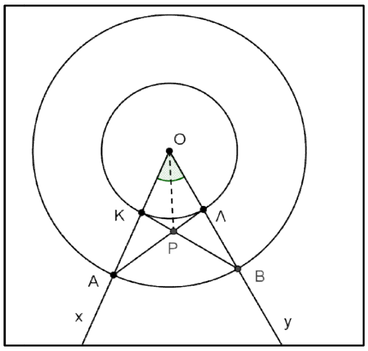
ii. το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Αν Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ να δείξετε ότι:

i. Οι γωνίες $\text{Γ}\hat{\text{Β}}\text{Ε}$ και $\text{Β}\hat{\text{Γ}}\text{Δ}$ είναι ίσες.

ii. το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $\text{Β}\hat{\text{Ρ}}\text{Γ}$.

10. Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (Ο, ρ_1) και (Ο, ρ_2) με $\rho_1<\rho_2$, που τέμνουν την Οχ στα σημεία Κ, Α και στην Οψ στα Λ, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) ΑΛ = ΒΚ ,

β) το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ,

γ) η ΟΡ διχοτομεί την $x\hat{O}y$.

11. Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή της** ως ενιαία πρόταση.

12. Θεωρούμε δυο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία (ε), δηλαδή η (ε) είναι μεσοκάθετος του AA'.

α) Αν η $A'B$ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}A'$.

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε).

β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. $KA = KA'$,

ii. $KA + KB > AO + OB$.

13. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στην πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στην πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΖ = ΑΕ ,

ii. ΑΚ = ΑΛ .

β) Ένας μαθητής, κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ και ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι;Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.