

5.2 Αριθμητική πρόοδος

1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $x(x^2 - 1) = 0$.

β) Να διατάξετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου.
2. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$ και $\omega = 3$.

α) Να βρείτε το νιοστό όρο της αριθμητικής προόδου (α_n) .

β) Να βρείτε τον νιοστό όρο μιας νέας αριθμητικής προόδου (β_n) με όρους τους περιττούς σε τάξη όρους της αριθμητικής προόδου (α_n) , δηλαδή τους $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7 \dots$.
3. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 4, 8, 12, ...

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 4$.

β) Να βρείτε τον εικοστό όρο της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της προόδου.
4. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) , με $\alpha_1 = -4$ και $\omega = 7$.

α) Να αποδείξετε ότι ο 2ος όρος της προόδου είναι $\alpha_2 = 3$.

β) Να υπολογίσετε τον 5ο όρο α_5 της προόδου.
5. Θεωρούμε τους αριθμούς $-12, -6, 0, \dots$ που συνεχίζονται προσθέτοντας κάθε φορά το 6.

α) i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

ii. Να βρείτε τους δύο επόμενους όρους της προόδου αυτής.

β) Αν ο -12 είναι 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της (προόδου αυτής) είναι ίσο με 0.
6. Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_3 = 18$ και $\alpha_4 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι για τη διαφορά ω της προόδου ισχύει $\omega = 8$.

β) Να βρείτε τους δυο πρώτους όρους της.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{37} = 290$.
7. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_2 = 8$ και $\omega = 2$.

α) Να δείξετε ότι ο 1ος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 6$.

β) Να υπολογίσετε τον 7ο όρο α_7 της προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 7 όρων της προόδου (α_n) .

8. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 5$.
- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.
- β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} = 59$.
9. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με πρώτους όρους τους $-4, -1, 2, 5, 8, \dots$.
- α) Να αποδείξετε ότι ο γενικός όρος αυτής της προόδου δίνεται από τη σχέση $\alpha_n = 3n - 7$, όπου $n = 1, 2, 3, \dots$
- β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.
10. Θεωρούμε τους αριθμούς $2, 4, 6, \dots$ που συνεχίζονται, προσθέτοντας κάθε φορά το 2.
- α) i. Ποιος είναι ο επόμενος αριθμός;
ii. Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια η διαφορά ω της προόδου αυτής;
- β) Ο αριθμός 2 είναι ο 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος. Να βρεθεί ο 8ος όρος της προόδου αυτής.
11. Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο $5, 9, 13, 17, \dots$.
- α) Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της αριθμητικής προόδου;
- β) Να βρείτε τον 51ο όρο της προόδου.
12. Οι φυσικοί αριθμοί $1, 2, 3, 4, \dots$ σχηματίζουν μια αριθμητική πρόοδο.
- α) Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της.
- β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πρώτων n φυσικών αριθμών δίνεται από τη σχέση: $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.
- γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των φυσικών αριθμών από το 200 μέχρι το 400.
13. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: $4, 8, 12, \dots$
- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 4$.
- β) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.
- γ) i. Να δείξετε ότι το πλήθος n των πρώτων όρων της παραπάνω προόδου που έχουν άθροισμα ίσο με 480 είναι λύση της εξίσωσης $n^2 + n - 240 = 0$.
- ii. Να βρείτε το πλήθος των πρώτων όρων της που έχουν άθροισμα τουλάχιστον 480.
(Δίνεται $\sqrt{961} = 31$)
14. Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6.560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11.910 ευρώ. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) , δηλαδή το κόστος για έναν καλεσμένο είναι α_1 , για δυο καλεσμένους είναι α_2, \dots , για πενήντα καλεσμένους α_{50}, \dots , για εκατό καλεσμένους α_{100} , κ.ο.κ.

- α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 1317$ και η διαφορά $\omega = 107$.
- β) Να δείξετε ότι το κόστος για n καλεσμένους είναι $a_n = 107n + 1210$.
- γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 85 καλεσμένους.
15. Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Στο τέλος του πρώτου μήνα είχαν κατασκευαστεί 5 τέτοια οχήματα, στο τέλος του δεύτερου μήνα 18, στο τέλος του τρίτου μήνα 31 κ.ο.κ.
- α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα στο τέλος του τέταρτου, του πέμπτου και του έκτου μήνα;
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
- γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τον πρώτο χρόνο;
- δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250ο αυτοκίνητο;
16. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (a_n) της οποίας ο 1ος όρος είναι $a_1 = 3$, ενώ ο 10ος όρος είναι $a_{10} = 21$.
- α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (a_n) .
- Για $\omega = 2$:
- β) Να βρείτε το άθροισμα S_{10} των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου (a_n) .
- γ) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (a_n) πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να ισούται με 168. (Δίνεται $\sqrt{676} = 26$.)
17. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με γενικό όρο $a_n = 4n - 2$.
- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω της προόδου.
- β) Αν $a_1 = 2$ και $\omega = 4$, να βρείτε τον πρώτο όρο της (a_n) που είναι μεγαλύτερος του 120.
- γ) Να βρείτε το άθροισμα S_{30} των 30 πρώτων όρων της προόδου (a_n) .
18. α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των αριθμών 8 και 16 είναι ο 12.
- β) Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) για την οποία ισχύει ότι $a_3 = 8$ και $a_5 = 16$.
- i. Να βρείτε τον 4ο όρο a_4 και τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (a_n) .
- ii. Να βρείτε τον 1ο όρο a_1 της αριθμητικής προόδου (a_n) .
19. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 9 = 0$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $2x \cdot (x^2 - 9) = 0$.
- γ) Να διατάξετε τις ρίζες της εξίσωσης του β) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
20. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_3 = 10$ και $a_5 = 18$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι $\omega = 4$ και ότι ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$.
- β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 32.
21. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) της οποίας ο 4ος όρος είναι ο $\alpha_4 = 10$ και ο 5ος όρος είναι ο $\alpha_5 = 7$.
- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου (α_n) είναι $\omega = -3$ και να βρείτε τον 1ο όρο α_1 της προόδου.
- β) Να βρείτε τον 8ο όρο της προόδου (α_n) .
22. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 7$ και διαφορά ω .
- α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.
- β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) είναι ίσος με $\alpha_n = 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}$ και να βρείτε τον 6ο όρο της προόδου.
- γ) Υπάρχει όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) που να ισούται με 21;
23. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_4 = 7$ και $\alpha_5 = 9$.
- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της αριθμητικής προόδου είναι $\omega = 2$.
- β) Να βρείτε τον πρώτο όρο της αριθμητικής προόδου.
- γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο 36.