

6.1 Η έννοια της συνάρτησης

1. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.
- β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 5x + 6}$.
- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
- α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x) = x^2 + 4x$.
- β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.
4. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8-x & , x < 0 \\ 2x+5 & , x \geq 0 \end{cases}$.
- α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.
- β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.
5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x - 6}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & , x < 0 \\ x-1 & , x \geq 0 \end{cases}$.
- α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.
- β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 0$.

7. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

- α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;
 β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x < 0 \\ x^2 + 1 & , x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.
 β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 2$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 0 \\ 2x + 2 & , x \geq 0 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.
 β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) = 8$.

10. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 3$.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

- α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.
 ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

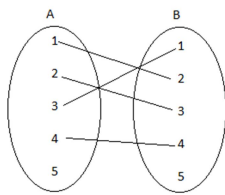
11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x : \text{άρρητος} \\ 2x & , x : \text{ρητός} \end{cases}$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
 β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

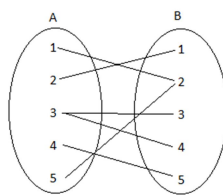
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
 β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

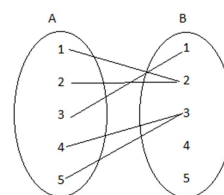
13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x + 5}$.
- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .
- β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.
- γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$.
14. Δίνεται η συνάρτηση G , με $G(x) = \frac{2x + 3}{x - 4}$.
- α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x = 2$, $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.
- β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .
- γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3.
15. Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.
- Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.
- Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.
- α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .
- β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.
16. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B .
- β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,
- Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
 - Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .
 - Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x + \alpha$ και $g(x) = \alpha x - 5$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

β) Για $\alpha = 1$,

i. να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$,

ii. να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x).$$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = |x| - 2$.

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$.

19. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της

$$\text{θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ } (^{\circ}\text{F}) \text{ είναι η } K = \frac{F - 32}{1,8} + 273.$$

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

20. Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

- γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).
- δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2}(10x - x^2) \text{ με } x \in (0,10).$$

β) i. Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$.

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

γ) Αν $x = 5$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

22. Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε

$$\text{ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 0,5x + 12, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

i. έλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό,

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β) Σε μια άλλη πόλη B , το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο $g(x) = 12 + 0,6x$, $x \geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B , να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

23. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB = x$ και $A\Gamma = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

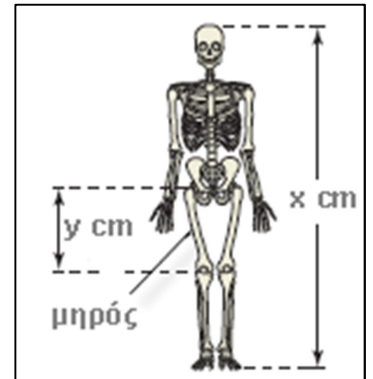
α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, να δείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in (0,10)$.

γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in (0,10)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

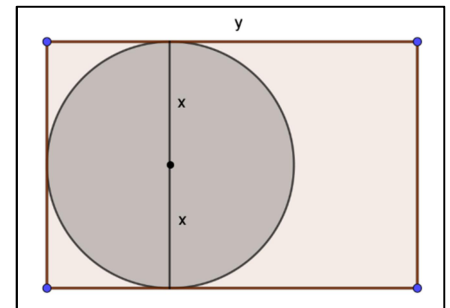
24. Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :

γυναίκα: $y = 0,43x - 26$ και άνδρας: $y = 0,45x - 31$.



- α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.
- β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

25. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α) i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι $y = 5 - 2x$, $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$E_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2, \quad x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση $E = 10x - (\pi + 4)x^2$, $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$.

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

- i. την ακτίνα x του κύκλου, ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

26. Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x - 1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E της μακέτας σε συνάρτηση του x .

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας ώστε, η περιήραξη του πάρκου στη μακέτα να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

27. Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$

$$\text{δίνεται από τον τύπο } E(x) = \frac{4}{3}(x - 25).$$

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

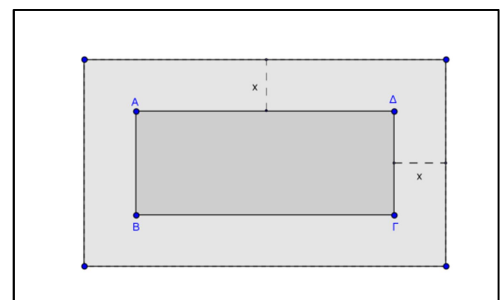
28. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$.

α) i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x-2}$ για κάθε $x \in A$.

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

29. Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$.

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 \text{ m}^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.