5.2 Αριθμητική Πρόοδος

1. **α)** Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,...,\nu$.

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακεραίους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα ίσο με 45.

2. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 5.

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο της όρο α_1 .

3. Ο 1ος όρος α_1 μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι ίσος με 2 και ο 3ος όρος της είναι ίσος με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

β) Για $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της πρόοδου είναι ίσος με 35.

4. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνεται ότι $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

5. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: 1,3,5,7,... .

α) **i.** Να γράψετε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

ii. Να βρείτε τον τριακοστό όρο α_{30} της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 30^2 .

6. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 6.

β) Να βρείτε τον εικοστό όρο της α_{20} προόδου.

γ) Να βρείτε το άθροισμα S_{20} των 20 πρώτων όρων της προόδου.

7. Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β) Αν ο πρώτος όρος α_1 της προόδου είναι ίσος με 0, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων της.

8. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.

β) Αν ισχύει ότι $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

9. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά $\omega = 4$, ισχύει ότι $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύει ότι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77. (Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

11. Δίνονται οι αριθμοί $1 - x$, $\frac{x}{2}$, $2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της αριθμητικής προόδου είναι ίση με 5.

12. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύει ότι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3 .

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152 .

13. Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε την τιμή του x.

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω της προόδου,

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο α_{20} της προόδου.

14. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι $\alpha_2 = 0$ και $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά και α_1 ο πρώτος όρος της προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι ο ν – οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

15. **α)** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $x + 2$, $x + 1$, $3x + 2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Για $x = -1$**,** να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

16. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

α) Να εκφράσετε με μία αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν – οστής σειράς.

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

17. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος της είναι ίσος με 8 και ο 8ος όρος της είναι ίσος με 23.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρος α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της προόδου.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$.

18. Δίνεται μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) και οι τρεις πρώτοι όροι της είναι οι

$$\alpha_1 = x \;,\; \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4 \;,\; \alpha_3 = x^2 - 2 \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{Z}$$

α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$.

β) Να βρείτε το ν – οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου ο οποίος να είναι ίσος με 2014 .

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$.

19. Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.
Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτηςπου θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης.

γ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν, ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτήν την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο.

20. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντοτε αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε το ν – οστό όρο της προόδου.

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η σειρά υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η σειρά υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η σειρά και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα,

ii. να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

21. Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δύο φορές γιατί της άρεσε πολύ!
Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, τη 2η ημέρα διάβασε 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη ημέρα. Τη δεύτερη φορά που διάβασε το βιβλίο, άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Την 1η ημέρα διάβασε 13 σελίδες, τη 2η ημέρα διάβασε 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δύο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α) i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν), της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο του ν – οστού όρου α_ν, αν ως πρώτο όρο θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη ημέρα.

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν), της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο του ν – οστού όρου β_ν, αν ως πρώτο όρο θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη ημέρα.

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1,2,3,4,5,6,7$.

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + \left(\beta^2 - 4\right)\ (1)$, με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

23. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 2x - 3 = 0\ (1)$.

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

24. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου;
Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

25. **α)** Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια:

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω,

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

26. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

27. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

28. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν – οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.

i. Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

29. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.

30. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$.

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν),

τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

31. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να βρείτε τον 1ο όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

Αν $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$,

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της προόδου.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$.

32. Οι αριθμοί : $x^2 + 5,\ x^2 + x,\ 2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i. τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii. τον πρώτο όρο της προόδου.

iii. το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \ldots + \alpha_{24}$.

33. Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x.

β) Να αποδείξετε ότι η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές.

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν.

34. Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega=3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta=[2,8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν),

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (α_ν).

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_ν) που υπάρχουν στο $\Delta=[2,8]$.

γ) Αν $\alpha_6=14$,

i. να βρείτε τον α_1.

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_ν) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186. (Δίνεται $\sqrt{4489}=67$).

35. Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6.560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11.910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu=107\nu+1210 \quad (1)$.

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

ii. της διαφοράς $\omega=107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

36. Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1=5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23η φορά το γράμμα Β.

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

37. Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250ο αυτοκίνητο;

38. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

39. Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_ν είναι το πλήθος των καθισμάτων της ν – οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι το α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω.

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

40. Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$.

α) **i.** Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

41. Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 2\nu \text{ , } \nu \in \mathbb{N} \text{ με } \nu \geq 1$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1$, $\nu \geq 2$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1$, $\nu \geq 1$ **.**

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

42. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;