

3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

1. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.
- β) i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.
 ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.
2. Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, με x πραγματικό αριθμό.
- α) Να αποδείξετε ότι αν $2 \leq x < 3$, τότε $A + B = x - 1$.
- β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
3. Δίνεται η εξίσωση $kx + 3 = 2x$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.
- α) Να λύσετε την εξίσωση για $k = 1$ και για $k = 3$.
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $k = 2$.
4. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:
- $$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}.$$
- β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.
- γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
5. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:
- i. Όταν $\alpha = 1$.
- ii. Όταν $\alpha = -3$.
- β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.
6. Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3 & , \quad x \geq -1 \\ 1 - x & , \quad x < -1 \end{cases}$.
- β) i. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

7. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

β) i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

8. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x - 2\lambda + 2 = 0$

α) i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα.

9. Δίνεται η εξίσωση $(|\alpha - 1| - 3)x = \alpha + 2$ (1) με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\alpha = 0$ και $\alpha = 5$.

β) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha - 1| = 3$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα β) i).

10. Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

11. Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, τότε:

i. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

12. Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\varepsilon\%$).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο $x \text{ €}$ με επιτόκιο $\varepsilon\%$, ύστερα από δύο έτη

θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2 \text{ €}$.

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3% . Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το **α)** ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i. Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1,03^2 - 1,02^2)y = 15811 - 15000 \cdot 1,02^2$$

ii. Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.