

## 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

1. Δίνεται η παράσταση  $A = |x-1| + |y-3|$  με  $x, y$  πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει:  $1 < x < 4$  και  $2 < y < 3$ . Να αποδείξετε ότι:
- α)  $A = x - y + 2$ ,                                      β)  $0 < A < 4$ .
2. α) Αν  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ , να δείξετε ότι  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$  (1).  
β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
3. α) Αν  $\alpha < 0$ , να δείξετε ότι:  $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ .  
β) Αν  $\alpha < 0$ , να δείξετε ότι:  $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$ .
4. Για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  με την ιδιότητα  $5 < x < 10$ ,
- α) να γράψετε τις παραστάσεις  $|x-5|$  και  $|x-10|$  χωρίς τις απόλυτες τιμές.  
β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$ .
5. Δίνεται η παράσταση:  $A = |3x-6| + 2$ , όπου ο  $x$  είναι πραγματικός αριθμός.
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. για κάθε  $x \geq 2$ ,  $A = 3x - 4$ .  
ii. για κάθε  $x < 2$ ,  $A = 8 - 3x$ .
- β) Αν για τον  $x$  ισχύει ότι  $x \geq 2$  να αποδείξετε ότι:  $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$ .
6. Για τον πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει:  $d(2x, 3) = 3 - 2x$ .
- α) Να αποδείξετε ότι  $x \leq \frac{3}{2}$ .  
β) Αν  $x \leq \frac{3}{2}$ , να αποδείξετε ότι η παράσταση:  $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ .
7. Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει  $\alpha < 0 < \beta < \gamma$ .
- α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός  $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$  είναι θετικός.

β) Να αποδείξετε ότι  $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$ .

8. α) Η αλγεβρική παράσταση  $K$ , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού  $x$  από τους αριθμούς 2 και  $-1$ , πάνω στον άξονα είναι:

A.  $K = |x + 1| + |x - 2|$

B.  $K = |x - 1| + |x + 2|$

Γ.  $K = (|x| + 1) + (|x| - 2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν είναι  $K = |x + 1| + |x - 2|$  τότε:

i. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $K$  όταν  $x = \frac{3}{2}$ .

ii. Αν  $x > 2$  να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση  $K$  και να αποδείξετε ότι  $K > 3$ .

9. Δίνεται η ανίσωση  $|x - 7| < 1$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $x \in (6, 8)$ .

β) Αν γνωρίζουμε ότι  $k \in (6, 8)$ , να αποδείξετε ότι  $\frac{24}{k} \in (3, 4)$ .

10. Δίνεται πραγματικός αριθμός  $x$ , για τον οποίο ισχύει:  $|x + 2| < 1$ .

Να δείξετε ότι:

α)  $-3 < x < -1$ ,                      β)  $|2x + 4| < 2$ .

11. α) Να λυθεί η ανίσωση:  $|y - 3| < 1$ .

β) Αν  $x, y$  είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με  $1 < x < 3$  και  $2 < y < 4$  τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού  $E$  του ορθογωνίου.

12. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  $\alpha > \beta$ , με  $\beta > 1$  και  $\alpha > 1$ , τότε

α) Να δείξετε ότι  $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$ .

β) Να δείξετε ότι  $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$ .

13. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  για τους οποίους ισχύει  $2 \leq \alpha \leq 3$  και  $-2 \leq \beta \leq -1$ .

α) Να δείξετε ότι:  $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$  και  $|\beta + 2| = \beta + 2$ .

β) Να δείξετε ότι:  $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$ .

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης  $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$  είναι ίση με 1.

14. Δίνονται τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $M$  που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς  $-2$ ,  $7$  και  $x$  αντίστοιχα, με  $-2 < x < 7$ .
- α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.
- i.  $|x + 2|$                       ii.  $|x - 7|$
- β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:  
 $|x + 2| + |x - 7|$ .
- γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = |x + 2| + |x - 7|$  γεωμετρικά.
- δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

15. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

- α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των  $\alpha$  και  $\beta$ .
- β) Αν επιπλέον  $|\beta - \alpha| = 4$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$ .
16. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  για τους οποίους ισχύει  $1 \leq \beta \leq 2$  και  $2 \leq \alpha \leq 4$ .
- α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των  $\alpha$  και  $\beta$  είναι μικρότερη ή ίση του 3.
- ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.
- β) i. Να δείξετε ότι  $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$ .
- ii. Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  για τους οποίους ισχύει  $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$ .