

Έστω η συνάρτηση  $f : (0,1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{x+\alpha}{\ln x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$  τέμνει τον άξονα  $yy'$  σε σημείο με τεταγμένη  $\frac{1}{e}$ .

α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 0$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = e\mu^2\left(\frac{\pi x}{2e}\right)$ .

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει μία μόνο εφαπτομένη η οποία τέμνει τον άξονα  $yy'$  σε σημείο με τεταγμένη ίση με 1.

δ) Σημείο  $M(x, y)$  με  $x > 1$  κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της  $f$ . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης της τεταγμένης του σημείου από την αρχή των αξόνων, όταν το σημείο βρίσκεται στη θέση τοπικού ελαχίστου της  $f$ . Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου είναι σταθερός και ίσος με 1 cm/s.

ε) Έστω  $E$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  με  $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \sqrt{e}$  και  $x = e^2$ . Να βρείτε την ευθεία  $x = \lambda$  με  $\lambda \in (\sqrt{e}, e^2)$  η οποία χωρίζει το  $E$  σε δύο ισεμβαδικά χωρία.