

Δίνεται η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln x + \frac{1+\alpha}{x} - 1 - \alpha$ όπου $\alpha > -1$.

Ο άξονας $x'x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f .

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $h: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{x+1}{x}$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f = g \circ h$ και να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

γ) i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο εφαπτομένες οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(0,1)$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι κάθε μία από αυτές βρίσκεται κάτω από τον κλάδο της γραφικής παράστασης της f στον οποίο εφάπτονται.

ε) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$ με $\lambda > 1$. Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

στ) Έστω η συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = f(x)$.

i. Να δείξετε ότι η φ αντιστρέφεται και ότι οι γραφικές παραστάσεις της φ και της αντίστροφής της φ^{-1} τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e-1}\right)$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\kappa \rightarrow 0^+} O(\kappa)$, όπου $O(\kappa) = \int_{\varphi(\kappa)}^{\varphi(\kappa+1)} \varphi^{-1}(y) dy$, $\kappa > 0$.