

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} - e^{\alpha x} + 1 & , x < 0 \\ (x + \beta) \ln(x + 1) & , x \geq 0 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 .

- α)** Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.
- β)** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- γ) i.** Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ και να δείξετε ότι την τέμνει σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e - 1)$.
- ii.** Να δείξετε ότι ισχύει $f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ)** Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $y'y$ και την ασύμπτωτη (ε) . Να δείξετε ότι $E > \frac{3}{4}$.
- ε)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $y'y$, την ασύμπτωτη (ε) και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda < 0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda)$.