

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x} \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ .

- α)**
- i.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $0$ .
  - ii.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $0$ .
- β)**
- i.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .
  - ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
  - iii.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = f^{-1}(x)$ .
- γ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική της  $f$  και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f^{-1}$ .
- δ)**
- i.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
  - ii.** Να βρείτε την εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο καμπής της.
  - iii.** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $0 < \lambda < 1$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .