

Δίνεται η συνάρτηση  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} x^2 (\ln x - 1)^2 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ,  $\alpha > 0$ .

Η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο το  $\alpha$  στο  $\alpha$ .

- α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 1$ .
- β) Να δείξετε ότι ο άξονας  $x'x$  είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε δύο σημεία της.
- γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa \geq 0$  για τις οποίες η εξίσωση  $|1 - \ln x| = \frac{\sqrt{\kappa}}{x}$  έχει ακριβώς δύο λύσεις.
- δ) Να βρείτε την άλλη εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ( $\varepsilon$ ) τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σε άλλο ένα σημείο εκτός από την αρχή των αξόνων και το σημείο επαφής.
- ε) Έστω  $E$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $0 < \lambda < e$ . Να υπολογίσετε το  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .
- στ) Έστω η συνάρτηση  $g : [e, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x)$ . Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων της  $g$  και της αντίστροφής της  $g^{-1}$ .