

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x - \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν η g έχει ολικό ελάχιστο το 0, να δείξετε ότι $\alpha = e$.

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να αιτιολογήσετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f και το σύνολο τιμών της.

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται και από την αρχή των αξόνων και στη συνέχεια να δείξετε ότι βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x \in [0, 1]$, εκτός από το σημείο επαφής και την αρχή των αξόνων.

ε) i. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει ότι $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x}$.

ii. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα yy' και την ευθεία $x = 1$, να αποδείξετε ότι $1 - \frac{2}{e} \leq E \leq \frac{1}{e-2}$.

στ) Έστω η συνάρτηση $h: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x)$.

Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της h και της αντίστροφής της h^{-1} έχουν μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων.