

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha + \ln(x+1)}{e^x} & , x \geq 0 \\ \frac{\beta}{x^2+1} & , x < 0 \end{cases}$ ,  $\alpha, \beta \neq 0$ .

Η  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $0$ .

- α) Να δείξετε ότι  $\alpha = \beta = 1$ .
- β) Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι έχει δύο σημεία καμπής  $A(x_1, f(x_1))$  και  $B(x_2, f(x_2))$ , με  $x_1 < 0$  και  $x_2 > 0$ , να βρείτε το  $x_1$  και να δείξετε ότι  $x_2 \in (1, 0)$ .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $\Gamma(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 < 0$ , η οποία διέρχεται από το ολικό της μέγιστο.
- δ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη ( $\zeta$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο της  $\Delta(\xi, f(\xi))$  με  $\xi > 0$  τέτοια, ώστε  $(\varepsilon) \perp (\zeta)$ .
- ε) Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τους άξονες  $x'$  και  $yy'$  και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $\lambda > 0$ . Να δείξετε ότι  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) \leq 2$ .