Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $2f(x)f'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x>1$, $f(1)=0$ και $f(e)=1$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g:(1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με $g(x)=f^2(x)-\ln x$ είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) **i.** Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}<f(x+1)-f(x)<\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

γ) **i.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της f^{-1}.

ii. Να δείξετε ότι $f^{-1}(x)>f(x)$ για κάθε $x\geq 1$.

iii. Να δείξετε ότι $\int_1^{\sqrt{e}} xf(x)dx<\frac{e^e-e}{2}$.

δ) **i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Έστω Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\sqrt{e}$. Να δείξετε ότι $E<\frac{(\sqrt{2e}+1)(e-1)}{2\sqrt{2e}}$.

ε) Ένα σώμα κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και κάθε χρονική στιγμή βρίσκεται στο σημείο της $M(x,y)$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι ίσο με $1\,\mu/s$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη α. Να βρείτε το σημείο Μ για το οποίο ο ρυθμός μεταβολής της α γίνεται μέγιστος.

στ) **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi=(-f)\circ h$ με $h(x)=e^{-x}$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x\ln x+2\ln x-1=0$ έχει μοναδική λύση ξ με $\xi(1,\sqrt{e})$.

iii. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και φ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(\xi,f(\xi))$.