

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{\ln^2 x + x}{(x + \ln x)^2}$ και $f(1) = 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x \ln x}{x + \ln x}$.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii. Να δείξετε ότι η (ε) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f εκτός από το σημείο επαφής της.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \eta \mu \left(\frac{1}{f(x)} \right)$.

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι

$$\int_{f(1)}^{f(\alpha)} f^{-1}(x) dx < \alpha f(\alpha)$$

Schools.patakis.gr