

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2 \ln x + \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο κοινό της σημείο με τη γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησή της f' .

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$.

Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x+2} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

γ) i. Να εξετάσετε αν η g είναι συνεχής στο 0 και παραγωγίσιμη στο 0 .

ii. Να βρείτε το πρόσημο της g για κάθε $x \geq 0$.

iii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g και η ευθεία $(\zeta): y = -\frac{1}{2}x$ τέμνονται μόνο σε δύο σημεία, στην αρχή των αξόνων και στο $(x_0, g(x_0))$.

δ) i. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του πραγματικού αριθμού k ώστε να ισχύει $\ln x \leq x - k$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να δείξετε ότι $\int_1^2 g(x) dx \leq 6 \ln \frac{4}{3} - \frac{3}{2}$.

Schools.patakis.gr