

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} 2 - e^{\alpha x} & , x < 0 \\ \beta + \ln(1+x) & , x \geq 0 \end{cases}$ , όπου  $\alpha, \beta$  σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

- α) Να δείξετε ότι  $\alpha = -1$  και  $\beta = 1$ .
- β) **i.** Να δείξετε ότι  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .
- ii.** Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$ .
- iii.** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f$  και  $f^{-1}$  έχουν ακριβώς δύο σημεία τομής, το  $A(x_1, f(x_1))$  με  $x_1 \in (1, e)$  και το  $B(x_2, f(x_2))$  με  $x_2 \in (-e, -1)$ .
- iv.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των  $f$  και  $f^{-1}$  στα σημεία  $A$  και  $B$  σχηματίζουν ρόμβο.
- γ) **i.** Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- ii.** Να δείξετε ότι  $f(x) - x \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την εφαπτομένη της στο σημείο της  $(e-1, f(e-1))$ .

Schools.patakis.gr