

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{x}\right)} & , x > 0 \end{cases}$ .

α) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: **i.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , **ii.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

γ) Αν  $g(x) = \varepsilon\phi x$ , να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [f(g(x)) - g(x)]$ .

δ) Αν  $h(x) = \sqrt{x} - x$ , να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(h(x))}{x} \right]$ .

ε) **i.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\alpha \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$  τέτοιο, ώστε  $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ .

**ii.** Να δείξετε ότι  $\varepsilon\phi^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{8\alpha^2-1}{(4\alpha^2-1)^2}$ .

**iii.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[ \frac{\eta\mu(2f(x)-1)}{2f(x)-1} \right]$ .

στ) **i.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $t = \varphi \circ f$  με  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

**ii.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} t(x)$ .

ζ) **i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $\delta: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\delta(x) = f(x)$  αντιστρέφεται.

**ii.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $\delta(x) > \delta^{-1}(x)$ .