

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) + x & , x < 0 \\ x - \sqrt{x^2 + 2x} & , x \geq 0 \end{cases}$ .

- α) Να υπολογίσετε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- β) Να δείξετε ότι για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$  και στη συνέχεια να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .
- γ) i. Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$  και ότι  $f([0, +\infty)) = (-1, 0]$ .  
ii. Έστω η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x)$ . Να δείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της  $g^{-1}$ .
- δ) Να δείξετε ότι για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $f(x) \geq -\frac{2}{\pi}$  και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = -\frac{2}{\pi}$ .

Schools.patakis.gr