

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x - \ln(1 - e^x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

γ) Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f^{-1} \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

i. Να βρείτε τη συνάρτηση g .

ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f^{-1} \circ g$ τέμνει τη διχοτόμο του 2ου και του 4ου τεταρτημορίου ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x < 0$, η γραφική παράσταση της $f \circ f$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

ε) Να υπολογίσετε τα όρια:

i.
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu[f(x) - f^{-1}(x)]}{f(x) - f^{-1}(x)}$$

ii.
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu[f(x) + x]}{f^2(x) - x^2}$$