

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ για κάθε $x \neq 0$ και $f(0) = 1$.

- α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β)** Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .
- γ)** Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \lambda$ με $0 < \lambda < 2$ και $x = 2$. Να δείξετε ότι $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda) \geq 1$.
- δ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδική εφαπτομένη, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, σε σημείο της με τετμημένη η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(-2, -1)$.
- ε)** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , όπου $g(x) = x \ln x$, έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη a η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(1, \sqrt{e})$.
- στ)** Έστω η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(1) = 1$ και $f(x) = (h \circ \varphi)(x)$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και $\varphi(x) = e^x$.
- i.** Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ισχύει $h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$ και στη συνέχεια να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο της $(1, h(1))$.
- ii.** Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και ότι οι γραφικές παραστάσεις των h και h^{-1} και η ευθεία $y = x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(1, h(1))$.