

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x + 1 + 2x \ln x$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

γ) Έστω, επιπλέον, η συνάρτηση  $g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \ln(x-1) - \frac{x \ln x + 1}{x-1}$ .

i. Να εξετάσετε τη  $g$  ως προς την κυρτότητα.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της παραγώγου  $g'$  της  $g$ .

δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ h$  με  $h(x) = e^x$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$(f \circ h)(x) = (f \circ h)(-x).$$

ε) Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη της ( $\varepsilon$ ) και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $0 < \lambda < x_0$ , όπου  $(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής της ( $\varepsilon$ ) με τη γραφική παράσταση της  $f$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .