

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x(\ln^2 x - 3\ln x + 3)$ .

- α)**
- i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
  - ii.** Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της  $f$  στα σημεία που παρουσιάζει ακρότατα την ξανά σε μοναδικό σημείο.
  - iii.** Αν  $e < \alpha < 3$ , να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $(\ln x - 1)^2 = \frac{x \ln x - 2x + \alpha}{x}$ .
- β)**
- i.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
  - ii.** Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , την εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) και την ευθεία  $x = \lambda$  με  $\lambda < \sqrt{e^3}$ . Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$ .
- γ)** Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο εφαπτομένες παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας  $x\hat{O}y$  που σχηματίζουν οι θετικοί ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$ .
- δ)** Να δείξετε ότι για κάθε  $x \geq \sqrt{e}$  ισχύει ότι  $x(\ln^2 x - 12\ln x + 13) \geq 8\sqrt{e}$ .
- ε)** Έστω οι συναρτήσεις  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$  και  $f = g \circ h$ .
- i.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $g$ .
  - ii.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\varphi(x) = 3 - g(x)$  αντιστρέφεται και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της  $\varphi$  και της αντίστροφής της  $\varphi^{-1}$ .
- στ.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f \circ q(x)$  με  $q(x) = \frac{1}{x}$  έχει μοναδική λύση το 1.