

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (e-x)\ln x - x\ln(e-x)$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι αύξουσα στο $(0, e)$.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της f .
- γ) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.
- δ) Έστω $A(0, \alpha)$ το σημείο στο οποίο τέμνει μία εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f τον άξονα yy' . Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του α .
- ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να δείξετε ότι η γραφικές παραστάσεις της f και της αντίστροφής της f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (e-1, e)$.
- στ) i. Να βρείτε τη συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) = g(x) - g(h(x))$ με $h(x) = e - x$.
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g και τον άξονα $x'x$.