Γεωμετρία Β΄ Γενικού Λυκείου

Απαντήσεις στα θέματα της Τράπεζας Θεμάτων

Συγγραφή απαντήσεων: Αθανάσιος Τσιούμας

Χρησιμοποιήστε τους σελιδοδείκτες (bookmarks) στο αριστερό μέρος της οθόνης για την πλοήγηση μέσα στο έγγραφο.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=9 και ΑΓ=15. Από το βαρύκεντρο Θ του τριγώνου, φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

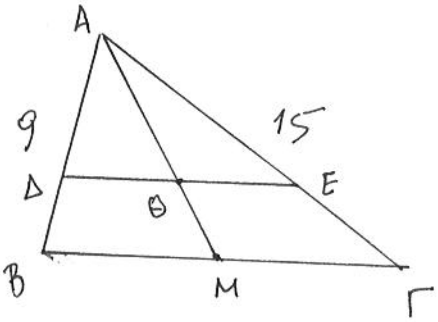
α) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=2$

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΓΕ.

(Μονάδες 10)

Λύση



α) Επειδή Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ θα έχουμε $ΑΘ=2ΘΜ$ (Μ το μέσο της ΒΓ) ή $\frac{ΑΘ}{ΘΜ}=2$ όμως $ΔΘ \parallel ΒΜ$ άρα από το θεώρημα Θαλή είναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΘ}{ΑΜ}=\frac{2}{3}$ αφού $ΑΘ=\frac{2}{3}ΑΜ$

επίσης $ΘΕ \parallel ΜΓ$ άρα $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΘ}{ΘΜ}=2$

β) • Αφού $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{9}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow ΑΔ=\frac{18}{3}$ ή $\boxed{ΑΔ=6}$

• επίσης $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=2 \Leftrightarrow ΑΕ=2ΕΓ$ όμως $ΑΕ+ΕΓ=ΑΓ=15 \Leftrightarrow$
$2ΕΓ+ΕΓ=15 \Leftrightarrow 3ΓΕ=15 \Leftrightarrow \boxed{ΓΕ=5}$

18984

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.

α) Να εξετάσετε σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. ΑΒ=8, ΑΓ=12, $\hat{A}=35^\circ$, ΔΕ=20, ΔΖ=30, $\hat{\Delta}=35^\circ$.

ii. $\hat{A}=47^\circ$, $\hat{B}=38^\circ$, $\hat{E}=47^\circ$, $\hat{\Delta}=95^\circ$.

iii. ΑΒ=ΑΓ, $\hat{A}=\hat{\Delta}$, ΔΕ=ΔΖ.

(Μονάδες 15)

β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΔΕΖ, να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

(Μονάδες 10)

Λύση

α)

i) Είναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ και $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

Επομένως έχουμε $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 35^\circ$

άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια, σύμφωνα με το κριτήριο ομοιότητας: έχουν δυο πλευρές ανάλογες και τις περιεχόμενες σ' αυτές γωνίες ίσες.

ii) Είναι $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (47^\circ + 38^\circ) = 95^\circ = \hat{\Delta}$ άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια αφού έχουν: $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{Z}$

iii) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισοσκελή με $\hat{A} = \hat{\Delta}$ οπότε θα έχουν και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{E} = \hat{Z}$ αφού $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ και $\hat{E} = \hat{Z} = \frac{180^\circ - \hat{\Delta}}{2}$
Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια.

β) i) Έχουμε $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$

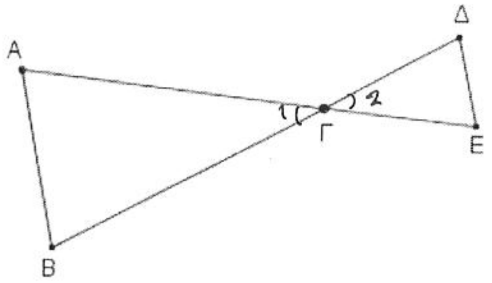
ii) Οι ομόλογες πλευρές των δυο τριγώνων είναι οι: ΑΒ με ΕΖ, ΑΓ με ΕΔ και ΒΓ με ΔΖ άρα έχουμε
$\frac{AB}{EZ} = \frac{A\Gamma}{E\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta Z}$

iii) Είναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{EZ}$

18990

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ.



Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) ΑΒ//ΔΕ

(Μονάδες 12)

β) ΒΓ=2ΔΓ και $ΕΓ = \frac{1}{2}ΑΓ$

(Μονάδες 13)

Λύση

α) έχουμε $\hat{A}=\hat{E}$ και $\hat{B}=\hat{\Delta}$ ως εντός εναλλάξ (ΑΒ//ΔΕ) οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια (δύο αντίστοιχες γωνίες ίσες)

β) είναι ΒΓ=2ΔΓ οπότε $\frac{ΒΓ}{ΔΓ} = 2$ (1)

Επίσης $ΕΓ=\frac{1}{2}ΑΓ$ άρα $\frac{ΑΓ}{ΕΓ} = 2$ (2)

από (1),(2) προκύπτει ότι $\frac{ΒΓ}{ΔΓ} = \frac{ΑΓ}{ΕΓ}$ και επειδή $\hat{Γ}_1=\hat{Γ}_2$ (ως κατακορυφήν) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ θα είναι όμοια.

ΘΕΜΑ 2

α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. ΑΓ=4, ΒΓ=16, ΒΑ=18, ΔΖ=10, ΕΖ=40, ΔΕ=48.

ii. $\hat{A}=63°$, $\hat{\Gamma}=83°$, $\hat{\Delta}=63°$, $\hat{E}=34°$.

(Μονάδες 15)

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6, ΑΓ=7 και ΒΓ=8. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ΔΕΖ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, με λόγο ομοιότητας 3;

(Μονάδες 10)

Λύση

α) i. είναι $\frac{A\Gamma}{\Delta Z}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$

και $\frac{BA}{\Delta E}=\frac{18}{48}=\frac{3}{8}\neq\frac{2}{5}$

άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ δεν είναι όμοια

ii) έχουμε $\hat{A}=\hat{\Delta}=63°$ και

$\hat{Z}=180°-(63°+34°)=83°=\hat{\Gamma}$

άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια (δυο αντίστοιχες γωνίες ίσες)

β) Αφού ΔΕΖ όμοιο με το ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας 3 θα έχουμε $\frac{\Delta E}{AB}=\frac{\Delta Z}{A\Gamma}=\frac{EZ}{B\Gamma}=3$ ή $\frac{\Delta E}{6}=\frac{\Delta Z}{7}=\frac{EZ}{8}=3$

επομένως $\Delta E=6\cdot 3=18$

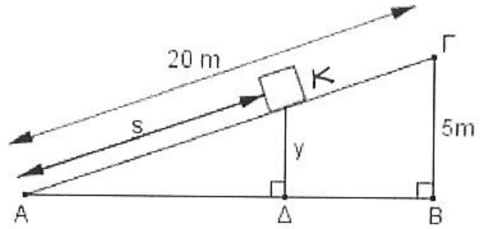
$\Delta Z=7\cdot 3=21$

και $EZ=8\cdot 3=24$

18997

ΘΕΜΑ 2

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y, που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι $y = \frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα.

(Μονάδες 15)

β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2 m, να βρείτε:

i. Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα.

(Μονάδες 3)

ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας Α.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΚ και ΑΒΓ είναι όμοια αφού:
- $\hat{A}$: κοινή
- $\hat{\Delta} = \hat{B} = 90°$

οπότε έχουμε $\frac{K\Delta}{B\Gamma} = \frac{AK}{A\Gamma}$ ή $\frac{y}{5} = \frac{s}{20} \Leftrightarrow$

$y = \frac{s}{4}$

β) i) Από το ερώτημα α) είναι $s = 4y$ και για $y = 2$ έχουμε
$s = 4 \cdot 2 = 8$ m

ii) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΚ ($\hat{\Delta} = 90°$) προκύπτει
$A\Delta^2 = AK^2 - K\Delta^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 8^2 - 2^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 60 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{60}$ ή $A\Delta = 2\sqrt{15}$

19001

ΘΕΜΑ 2

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι α=8, β=6 και γ=5.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 11)

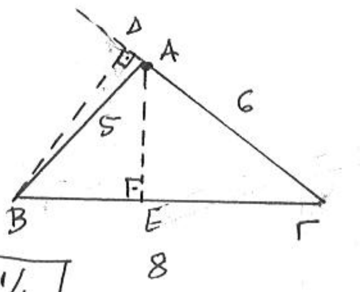
β) Να υπολογίσετε τις προβολές της πλευράς ΑΒ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ.

(Μονάδες 14)

Λύση

α) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $α=8$ οπότε
$α^2=8^2=64$ και $β^2+γ^2=6^2+5^2=61$ άρα $α^2>β^2+γ^2$
δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο στο Α

β) • Η $προβ_{ΑΓ}^{ΑΒ}=ΑΔ$
άρα έχουμε από το θεώρημα της αμβλείας στο τρίγωνο ΑΒΓ



$ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2+2ΑΓ\cdot προβ_{ΑΓ}^{ΑΒ}$
ή $ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2+2ΑΓ\cdot ΑΔ \Leftrightarrow$
$64=61+2\cdot 6\cdot ΑΔ \Leftrightarrow 12ΑΔ=3 \Leftrightarrow \boxed{ΑΔ=1/4}$

• Η $προβ_{ΒΓ}^{ΑΒ}=ΒΕ$ οπότε από το θεώρημα της οξείας γωνίας ($\hat{Β}<90°$) στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
$ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2-2ΒΓ\cdot προβ_{ΒΓ}^{ΑΒ}$ ή $ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2-2ΒΓ\cdot ΒΕ \Leftrightarrow$
$6^2=5^2+8^2-2\cdot 8\cdot ΒΕ \Leftrightarrow 16ΒΕ=53 \Leftrightarrow \boxed{ΒΕ=\frac{53}{16}}$

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ σε σημείο Δ, τέτοιο ώστε $\frac{BΔ}{ΔΓ}=\frac{3}{4}$.

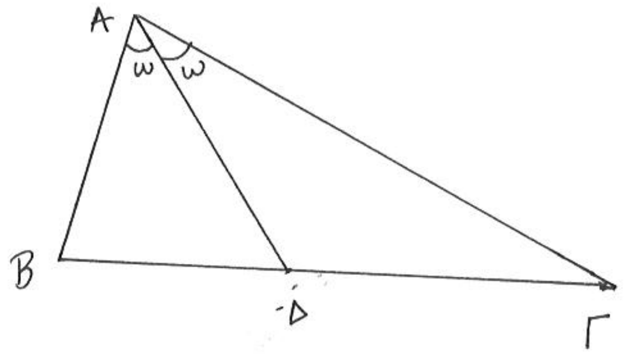
α) Να αποδείξετε ότι $AB=\frac{3}{4}AΓ$.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $BΓ=\frac{5}{4}AΓ$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Λύση



α) Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε

$$\frac{AB}{AΓ}=\frac{BΔ}{ΔΓ}=\frac{3}{4}$$

οπότε $\frac{AB}{AΓ}=\frac{3}{4}$ ή $AB=\frac{3}{4}AΓ$

β) έχουμε $AB^2+AΓ^2=\left(\frac{3}{4}AΓ\right)^2+AΓ^2=\frac{9}{16}AΓ^2+AΓ^2=\frac{25}{16}AΓ^2=\left(\frac{5}{4}AΓ\right)^2=BΓ^2$ δηλαδή στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα τη ΒΓ.

19008

ΘΕΜΑ 2

α) Ποιες από τις παρακάτω τριάδες θετικών αριθμών μπορούν να θεωρηθούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

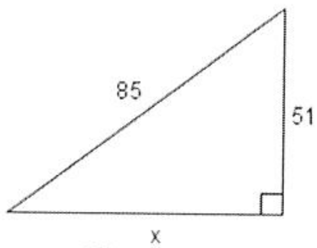
i. 3, 4, 5

ii. 3λ, 4λ, 5λ (λ>0)

iii. 4, 5, 6

(Μονάδες18)

β) Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να αποδείξετε ότι, το μήκος x είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4.



Λύση

(Μονάδες 7)

α) i. Είναι $3^2+4^2=25$ και $5^2=25$ οπότε
$3^2+4^2=5^2$ δηλαδή τα μήκη 3, 4, 5 είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα που έχει μήκος 5

ii. Επίσης $(3λ)^2+(4λ)^2=25λ^2=(5λ)^2$ οπότε τα μήκη 3λ, 4λ και 5λ είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου

iii. Είναι $4^2+5^2=16+25=41$
ενώ $6^2=36$ δηλαδή $41\neq 36$ οπότε τα μήκη 4, 5, 6 δεν είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$x^2+51^2=85^2 \Leftrightarrow x^2=85^2-51^2 \Leftrightarrow x^2=(85-51)\cdot(85+51) \Leftrightarrow$
$x^2=34\cdot 136 \Leftrightarrow x^2=2\cdot 17\cdot 8\cdot 17 \Leftrightarrow x^2=16\cdot 17^2 \Leftrightarrow x^2=(4\cdot 17)^2$
$\Leftrightarrow x=4\cdot 17$ που είναι πολλαπλάσιο του 4

19011

ΘΕΜΑ 2

Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α)

i. Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια.

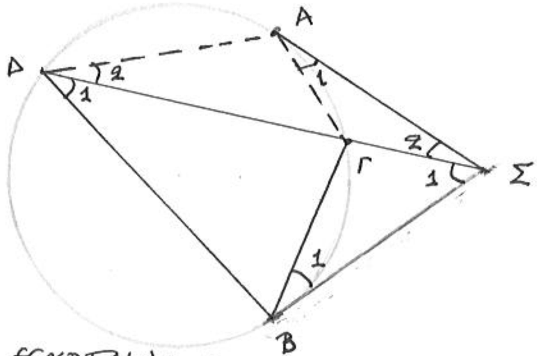
ii. Τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια.

(Μονάδες 16)

β) ΑΓ·ΒΔ=ΑΔ·ΒΓ

(Μονάδες 9)

Λύση



α)

i. Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια διότι έχουν:

- $\hat{Σ}_1$ κοινή
- $\hat{Δ}_1 = \hat{B}_1$ (η $\hat{B}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης)

ii) Επίσης τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια αφού $\hat{Σ}_2$ κοινή και $\hat{Δ}_2 = \hat{A}_1$ (γωνία χορδής και εφαπτομένης)

β) από την ομοιότητα των τριγώνων ΣΒΓ και ΣΔΒ προκύπτει: $\frac{ΣΓ}{ΣΒ} = \frac{ΒΓ}{ΔΒ}$ (1) και από την ομοιότητα των τριγώνων ΣΑΓ και ΣΔΑ προκύπτει ότι $\frac{ΣΓ}{ΣΑ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ}$ (2)

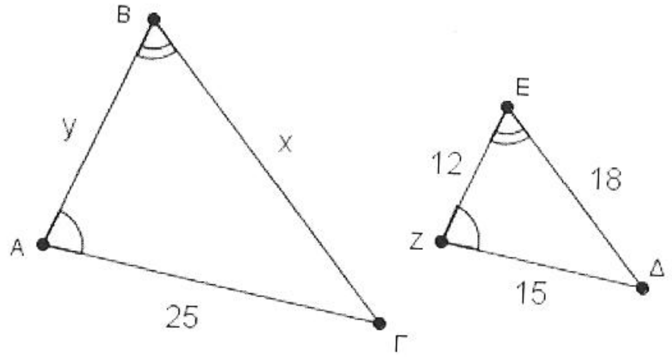
Επίσης ΣΑ = ΣΒ (3) (ως εφαπτόμενα τμήματα)

Από (1), (2) και (3) έχουμε

$\frac{ΒΓ}{ΔΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} \Leftrightarrow ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$

ΘΕΜΑ 2

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{A}=\hat{Z}$, $\hat{B}=\hat{E}$ και ΑΓ=25, ΕΖ=12, ΕΔ=18 και ΖΔ=15.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

(Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου *ΔΕΖ* :

$$\frac{BA}{\dots\dots} = \frac{A\Gamma}{\dots\dots} = \frac{\Gamma B}{\dots\dots}$$

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα *x* και *y*.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Επειδή $\hat{A}=\hat{Z}$ και $\hat{B}=\hat{E}$ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια

β) από την παραπάνω ομοιότητα των τριγώνων έχουμε

$$\frac{BA}{EZ} = \frac{A\Gamma}{Z\Delta} = \frac{B\Gamma}{E\Delta}$$

γ) Από το β) είναι :

$$\frac{y}{12} = \frac{25}{15} = \frac{x}{18}$$ οπότε έχουμε

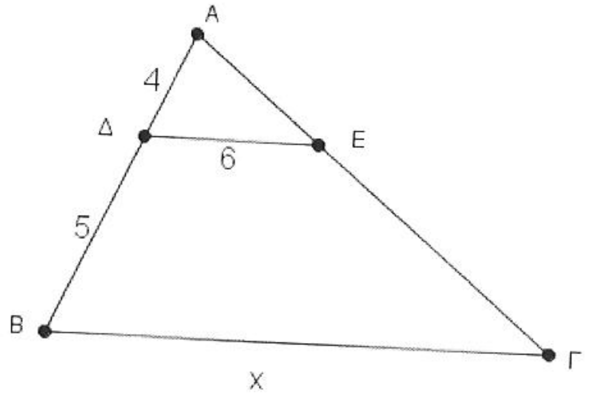
$$\frac{x}{18} = \frac{25}{15} \Leftrightarrow \frac{x}{18} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{90}{3} \Leftrightarrow x = 30$$

Και $$\frac{y}{12} = \frac{25}{15} \Leftrightarrow \frac{y}{12} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow y = \frac{60}{3} \Leftrightarrow y = 20$$

19015

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και επιπλέον ισχύουν ΑΔ=4, ΔΒ=5 και ΔΕ=6.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$$\frac{ΑΒ}{\ldots} = \frac{\ldots}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{\ldots}$$

(Μονάδες 9)

γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x. Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε την τιμή του x.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Επειδή ΔΕ//ΒΓ η $\hat{ΑΔΕ} = \hat{Β}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά) και $\hat{Α}$ κοινή οπότε $\overset{\triangle}{ΑΒΓ} \approx \overset{\triangle}{ΑΔΕ}$ (όμοια)

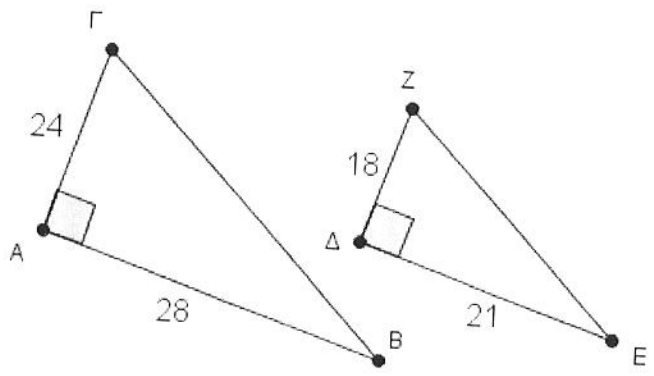
β) είναι $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΒΓ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ}$

γ) Η αναλογία $\frac{4}{6} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΔΕ} = \frac{ΒΔ}{ΕΓ}$ είναι λάθος διότι οι πλευρές ΒΔ και ΕΓ δεν είναι ομόλογες των δύο τριγώνων.
Η σωστή αναλογία είναι:
$\frac{ΑΔ}{ΔΕ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$ ή $\frac{4}{6} = \frac{9}{x} \Leftrightarrow 4x = 54 \Leftrightarrow x = \frac{54}{4}$

$\Leftrightarrow x = 13,5$

ΘΕΜΑ 2

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες Α και Δ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα ισχύουν ΑΒ=28, ΑΓ=24 και ΔΕ=21, ΔΖ=18.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά:

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\dots}$$

(Μονάδες 9)

γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή.

i. $ZE = \frac{18}{21}\Gamma B$ **ii.** $ZE = \frac{24}{28}\Gamma B$ **iii.** $ZE = \frac{3}{4}\Gamma B$ **iv.** $ZE = \frac{4}{3}\Gamma B$

Λύση

(Μονάδες 6)

α) Είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$

και $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$ ενώ $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$ δηλαδή

$\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{AB}{\Delta E}$ οπότε $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \approx \overset{\triangle}{\Delta EZ}$

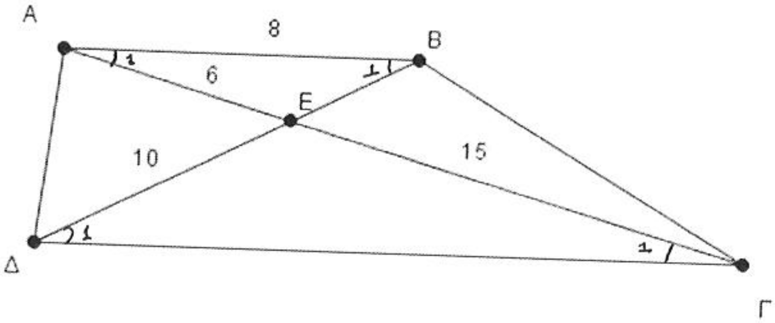
β) Είναι $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

γ) Η σωστή είναι η iii.

19019

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν ΑΒ//ΔΓ, ΑΕ=6, ΑΒ=8, ΓΕ=15 και ΔΕ=10.



α) Να βρείτε δυο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων ΑΕΒ και ΔΕΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΕ και ΔΓ.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $\hat{A}_1 = \hat{Γ}_1$ και $\hat{B}_1 = \hat{Δ}_1$ ως εντός εναλλάξ (ΑΒ//ΔΓ)

β) από το α) προκύπτει ότι $A\overset{\triangle}{E}B \approx Γ\overset{\triangle}{E}Δ$ άρα έχουμε

$$\frac{AE}{EΓ} = \frac{AB}{ΓΔ} = \frac{EB}{EΔ}$$

γ) από την προηγούμενη ισότητα λόγων είναι:

$$\frac{6}{15} = \frac{8}{ΓΔ} = \frac{EB}{10}$$ άρα $6ΓΔ = 8 \cdot 15 \Leftrightarrow ΓΔ = 20$

και $\frac{BE}{10} = \frac{6}{15} \Leftrightarrow BE = \frac{6 \cdot 10}{15} \Leftrightarrow BE = 4$

ΘΕΜΑ 2

Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων, προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα:

α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και ποιο δεν είναι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 14)

β) Για το ζεύγος των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος,

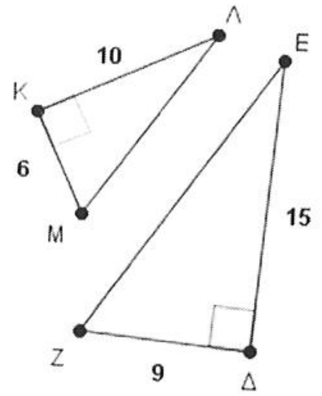
i. να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών.

(Μονάδες 6)

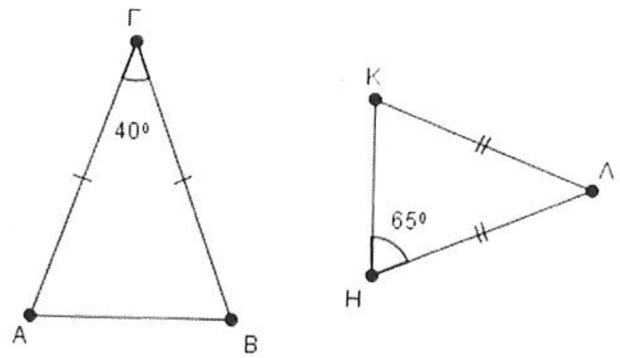
ii. να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 5)

1^{ο}ζεύγος: τρίγωνα ΚΛΜ και ΖΔΕ



2^{ο} ζεύγος: τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΚΛ



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΔΕΖ είναι όμοια αφού έχουν:
$\hat{K}=\hat{\Delta}=90^\circ$ και $\frac{ΚΛ}{ΔΕ}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ ενώ $\frac{ΚΜ}{ΔΖ}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

άρα $\frac{ΚΛ}{ΔΕ}=\frac{ΚΜ}{ΔΖ}$.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΚΛ που είναι ισοσκελή δεν είναι όμοια αφού $\hat{A}=\hat{B}=70^\circ$ και $\hat{\Gamma}=40^\circ$ ενώ $\hat{H}=\hat{K}=65^\circ$ και $\hat{\Lambda}=50^\circ$

β) i. έχουμε $\frac{ΚΛ}{ΔΕ}=\frac{ΚΜ}{ΔΖ}=\frac{ΛΜ}{ΕΖ}$

ii. είναι $\frac{ΚΛ}{ΔΕ}=\frac{2}{3}$ που θα είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων.

19023

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και έχουν $\hat{Δ}=\hat{N}$ και $\hat{B}=\hat{Λ}$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

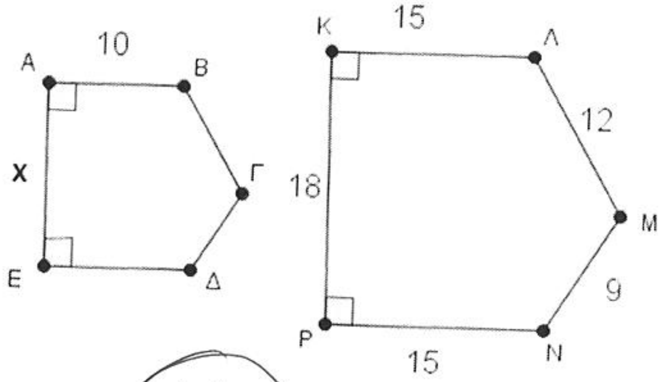
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

(Μονάδες 9)



Λύση

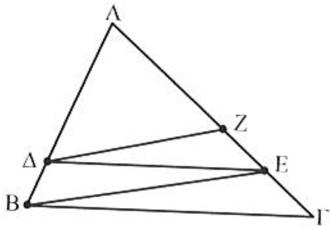
α) Επειδή τα πολύγωνα είναι όμοια οι ομόλογες πλευρές τους θα είναι ανάλογες δηλαδή $\frac{ΑΒ}{ΚΛ}=\frac{ΒΓ}{ΛΜ}=\frac{ΓΔ}{ΜΝ}=\frac{ΔΕ}{ΝΡ}=\frac{ΕΑ}{ΡΚ}=λ$ (1)
επομένως ο λόγος ομοιότητας τους είναι $λ=\frac{ΑΒ}{ΚΛ}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

β) Από την (1) έχουμε $\frac{ΑΕ}{ΡΚ}=λ \Leftrightarrow \frac{x}{18}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x=36 \Leftrightarrow x=12$

γ) Έστω Π η περίμετρος του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ και Π' η περίμετρος του πολυγώνου ΚΛΜΝΡ τότε ισχύει
$\frac{Π}{Π'}=λ$ όμως $Π'=15+12+9+15+18=69$ και $λ=\frac{2}{3}$ άρα
$\frac{Π}{69}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow Π=\frac{2\cdot 69}{3} \Leftrightarrow Π=26$

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς τη ΒΕ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$

(Μονάδες 10)

Β $\frac{ΑΖ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ}$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΕ}$

(Μονάδες 5)

Λύση

α) επειδή ΔΕ//ΒΓ από το θεώρημα Θαλή έχουμε

$\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ} \Leftrightarrow \frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$

β) Επίσης ΔΖ//ΒΕ οπότε $\frac{ΑΖ}{ΑΕ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ} \Leftrightarrow \frac{ΑΖ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ}$

γ) από το α) είναι $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ και από το β) έχουμε

$\frac{ΑΖ}{ΑΕ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ οπότε προκύπτει $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΕ}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε από το σημείο Δ παράλληλες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν αντίστοιχα τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}$

(Μονάδες 10)

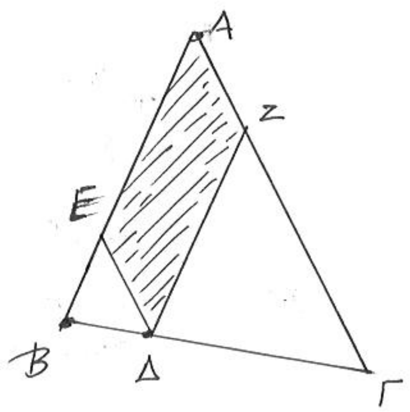
β) $\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΓ}{ΒΓ}$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}+\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=1$

(Μονάδες 5)

Λύση



α) Είναι ΔΕ//ΑΖ και ΔΖ//ΑΕ
οπότε τετράπλευρο ΑΕΔΖ
είναι παραλληλόγραμμο
άρα ΔΕ=ΑΖ (1) και ΔΖ=ΑΕ (2)
Επειδή ΔΕ//ΑΓ έχουμε
$\frac{ΑΖ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}$ και από την (1)
Είναι $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}$

β) Επίσης από ΔΕ//ΑΓ είναι $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{ΔΓ}{ΒΓ}$ (από Θεώρημα Θαλή)
και από την (2) έχουμε $\frac{ΔΖ}{ΑΒ}=\frac{ΔΓ}{ΒΓ}$

γ) από τα α) και β) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:
$\frac{ΔΕ}{ΑΓ}+\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}+\frac{ΔΓ}{ΒΓ}=\frac{ΒΔ+ΔΓ}{ΒΓ}=\frac{ΒΓ}{ΒΓ}=1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΒΕ το ύψος του. Αν είναι ΑΒ=3, ΓΔ=7 και ΒΓ=4 τότε,

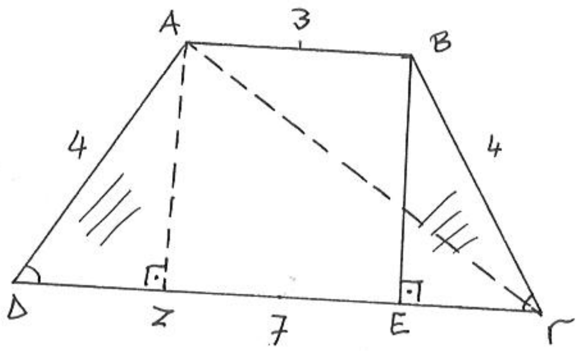
α) να αποδείξετε ότι $ΒΕ = 2\sqrt{3}$.

(Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 12)

Λύση



α) Από το Α φέρουμε $ΑΖ \perp ΔΓ$ τότε $\overset{\triangle}{ΑΔΖ} = \overset{\triangle}{ΒΕΓ}$ αφού είναι ορθογώνια, $ΑΔ = ΒΓ$ και $\hat{Δ} = \hat{Γ}$ οπότε $ΔΖ = ΕΓ = \frac{7-3}{2} = 2$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε $ΒΕ^2 = ΒΓ^2 - ΕΓ^2 \Leftrightarrow ΒΕ^2 = 4^2 - 2^2 \Leftrightarrow ΒΕ^2 = 12 \Leftrightarrow ΒΕ = \sqrt{12}$ ή $\boxed{ΒΕ = 2\sqrt{3}}$

β) Είναι $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} β \cdot υ$ ή $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΑΒ \cdot ΒΕ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

ΘΕΜΑ 2

Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β τέτοια ώστε ΟΒ = 2ΟΑ.

Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Οx στο σημείο Ε και έστω Δ η προβολή του Β στην Οy.

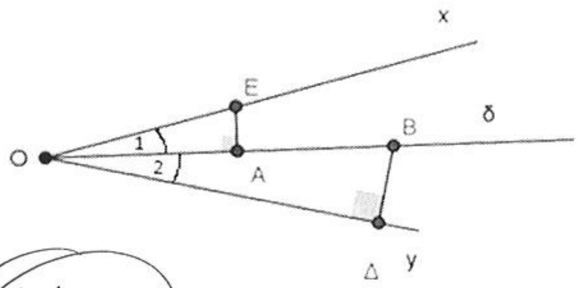
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) $2ΟΑ^2 = ΟΔ \cdot ΟΕ$.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ έχουν:

- $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (αφού Οδ διχοτόμος)
- $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

άρα $O\overset{\triangle}{A}E \simeq O\Delta\overset{\triangle}{B}$

β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΑΕ και ΟΔΒ έχουμε

$\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{O\Delta} \Leftrightarrow OA \cdot OB = O\Delta \cdot OE$ όμως $OB = 2OA$ άρα προκύπτει

$OA \cdot 2OA = O\Delta \cdot OE \Leftrightarrow 2OA^2 = O\Delta \cdot OE$.

ΘΕΜΑ 2

Στο κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, η διχοτόμος της γωνίας Α είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ και τέμνει τη ΔΒ στο Ε και τη ΔΓ στο Ζ.

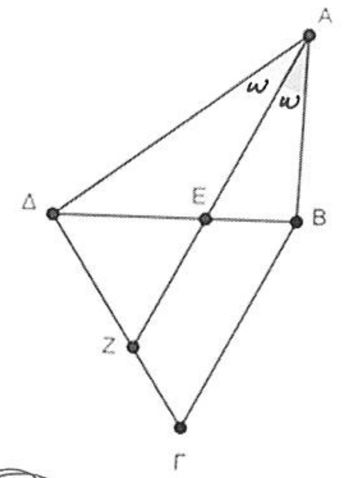
Αν ΑΔ = 12, ΑΒ = 8, ΔΕ= 9 και ΖΓ = 6, να αποδείξετε ότι:

α) ΕΒ = 6

(Μονάδες 13)

β) ΔΖ =9

(Μονάδες 12)



Λύση

α) Από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου ΑΕ του τριγώνου ΑΔΒ έχουμε:

$$\frac{AB}{A\Delta}=\frac{EB}{E\Delta} \Leftrightarrow \frac{8}{12}=\frac{EB}{9} \Leftrightarrow 12EB=72 \Leftrightarrow EB=6$$

β) Επειδή ΕΖ//ΒΓ από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΔΓΒ προκύπτει:

$$\frac{\Delta Z}{Z\Gamma}=\frac{\Delta E}{EB} \Leftrightarrow \frac{\Delta Z}{6}=\frac{9}{6} \Leftrightarrow \Delta Z=9$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{ΓΗ}{ΓΒ}=\frac{ΓΘ}{ΓΔ}=\frac{1}{3}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΖ//ΘΗ//ΔΒ.

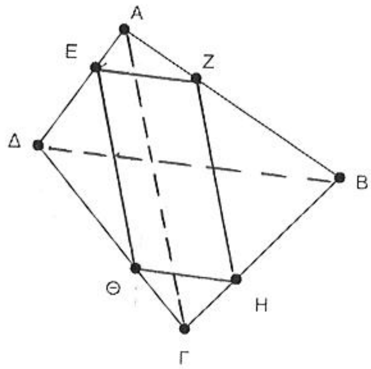
(Μονάδες 10)

β) ΕΖ = ΘΗ = $\frac{1}{3}$ ΔΒ.

(Μονάδες 10)

γ) ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 5)



Λύση

α) Επειδή από την υπόθεση είναι $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}$ έχουμε ΕΖ//ΔΒ (αντίστροφο θ. Θαλή)
Επίσης $\frac{ΓΘ}{ΓΔ}=\frac{ΓΗ}{ΓΒ}$ οπότε ΘΗ//ΔΒ
Άρα ΕΖ//ΘΗ//ΔΒ

β) Αφού ΕΖ//ΔΒ τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΔΒ είναι όμοια οπότε: $\frac{ΕΖ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{1}{3}$ άρα $ΕΖ=\frac{1}{3}ΔΒ$ επίσης $\overset{\triangle}{ΓΘΗ} \sim \overset{\triangle}{ΓΔΒ}$ άρα
$\frac{ΘΗ}{ΔΒ}=\frac{ΓΗ}{ΓΒ}=\frac{1}{3}$ οπότε $ΘΗ=\frac{1}{3}ΔΒ$
Επομένως $ΕΖ=ΘΗ=\frac{1}{3}ΔΒ$

γ) Από το ερώτημα α) είναι ΕΖ//ΘΗ και από το β) ΕΖ=ΘΗ οπότε ΕΖ =// ΘΗ που σημαίνει ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

19035

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ώστε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ζ.

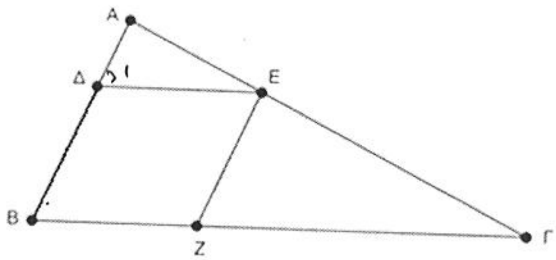
Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) 3ΒΖ = ΒΓ.

(Μονάδες 15)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν:

- $\hat{A}$ κοινή
- $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$ (ως εντός εναλλάξ)

άρα είναι όμοια

β) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουμε:

$\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$ άρα $3ΔΕ = ΒΓ$ (1)

Όμως το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο αφού ΔΕ // ΒΖ και ΒΔ // ΕΖ άρα ΔΕ = ΒΖ (2)

Από (1),(2) έχουμε 3ΒΖ = ΒΓ

ΘΕΜΑ 2

Οι διαγώνιοι του τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ τέμνονται στο Ο. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΔ τέμνει την ΑΓ στο Μ.

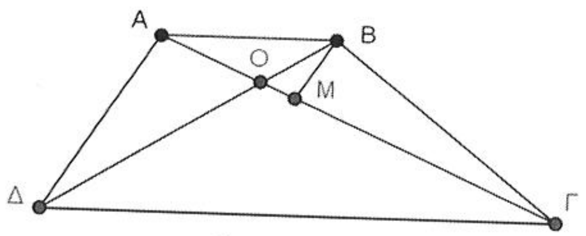
Αν ΟΑ=12, ΟΒ=9 και ΟΓ=36, να αποδείξετε ότι:

α) ΟΔ = 27

(Μονάδες 12)

β) ΟΜ = 4

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Επειδή ΑΒ//ΔΓ από το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{OB}{O\Delta} \Leftrightarrow \frac{12}{36} = \frac{9}{O\Delta} \Leftrightarrow \frac{9}{O\Delta} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{O\Delta = 27}$$

β) Είναι ΒΜ//ΑΔ άρα επίσης από Θ. Θαλή έχουμε

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OB}{O\Delta} \Leftrightarrow \frac{OM}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3OM = 12 \Leftrightarrow \boxed{OM = 4}$$

ΘΕΜΑ 2

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ κέντρου Ο θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή ΔΒ τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου ΟΒ στο Γ.

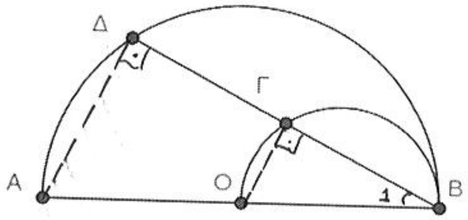
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 12)

β) (ΑΔΒ)= 4 (ΟΓΒ)

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Η γωνία $O\hat{Γ}B = 90^\circ$ (ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)
ομοίως και η $A\hat{Δ}B = 90^\circ$ (ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)
Επομένως $O\hat{Γ}B = A\hat{Δ}B$, επίσης $\hat{B}_1$ είναι κοινή των τριγώνων
ΑΔΒ και ΟΓΒ άρα αυτά είναι όμοια

β) Επειδή $\overset{\triangle}{AΔB} \approx \overset{\triangle}{OΓB}$ θα ισχύει $\frac{(ABΔ)}{(OΓB)} = \left(\frac{AB}{OB}\right)^2 = 2^2 = 4$
αφού ο λόγος των εμβαδών θα ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας $\frac{AB}{OB} = \frac{2OB}{OB} = 2$

19040

ΘΕΜΑ 2

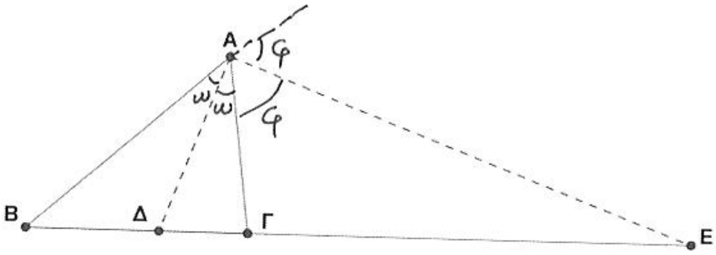
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ>ΑΓ) και ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος του αντίστοιχα. Αν είναι ΑΒ=6, ΔΒ=3, ΒΓ=5 και ΒΕ=15, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ = 4

(Μονάδες 12)

β) ΔΕ = 12

(Μονάδες 13)



Λύση

α) Είναι $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 5 - 3 = 2$ οπότε από το θεώρημα της εσωτερικής διχοτόμου ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{6}{A\Gamma} \Leftrightarrow 3A\Gamma = 12 \Leftrightarrow A\Gamma = 4$$

β) Από το θεώρημα της εξωτερικής διχοτόμου ΑΕ του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{15}{E\Gamma} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow 6E\Gamma = 60 \Leftrightarrow E\Gamma = 10$$

Επομένως $\Delta E = \Delta\Gamma + E\Gamma = 2 + 10 = 12$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος ΑΔ και $A\Gamma = 8$, $\Delta\Gamma = \frac{32}{5}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των παρακάτω τμημάτων:

α) ΒΓ

(Μονάδες 9)

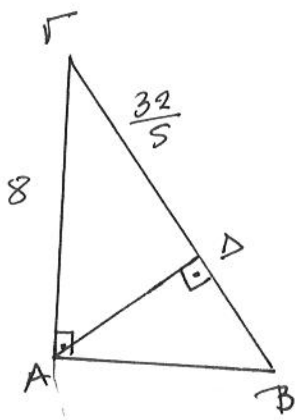
β) ΑΒ

(Μονάδες 8)

γ) ΑΔ

(Μονάδες 8)

Λύση



α) Έχουμε $A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot \Gamma B \Leftrightarrow$

$8^2 = \frac{32}{5} \cdot \Gamma B \Leftrightarrow 32\Gamma B = 64 \cdot 5$

$\Leftrightarrow \Gamma B = 2 \cdot 5 \Leftrightarrow \boxed{\Gamma B = 10}$

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 \Leftrightarrow AB^2 = 10^2 - 8^2 \Leftrightarrow AB^2 = 36 \Leftrightarrow$ $\boxed{AB = 6}$

2ος τρόπος είναι $B\Delta = B\Gamma - \Gamma\Delta = 10 - \frac{32}{5} = \frac{50-32}{5} = \frac{18}{5}$

οπότε $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma \Leftrightarrow AB^2 = \frac{18}{5} \cdot 10 \Leftrightarrow AB^2 = 36 \Leftrightarrow AB = 6$

γ) Έχουμε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Delta^2 = \frac{18}{5} \cdot \frac{32}{5} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \frac{2 \cdot 9 \cdot 32}{5^2}$

$\Leftrightarrow A\Delta^2 = \frac{9 \cdot 64}{5^2} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \left(\frac{3 \cdot 8}{5}\right)^2 \Leftrightarrow A\Delta = \frac{24}{5}$

ή $A\Delta^2 = A\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2$ (από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha = 7$, $\beta = 4$ και $\mu_\beta = \sqrt{33}$.

α) Να αποδείξετε ότι γ=5.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Από το 1ο θεώρημα της διαμέσου έχουμε:

$\alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \Leftrightarrow 7^2 + \gamma^2 = 2\sqrt{33}^2 + \frac{4^2}{2} \Leftrightarrow \gamma^2 = 2 \cdot 33 + 8 - 49$

$\Leftrightarrow \gamma^2 = 25 \Leftrightarrow \gamma = 5$

β) Η $\hat{A}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου αφού η πλευρά α είναι η μεγαλύτερη.

Έχουμε $\alpha^2 = 7^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 4^2 + 5^2 = 41$ δηλαδή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ $(49 > 41)$ επομένως το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο στο Α.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $ΑΓ = 4$ και ύψος $ΑΔ = \frac{12}{5}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΓ.

(Μονάδες 10)

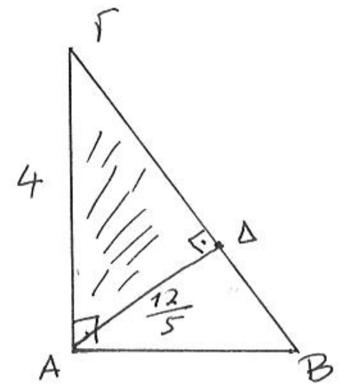
β) Να αποδείξετε ότι $ΔΒ = \frac{9}{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 5)

Λύση



α) Με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$ έχουμε:

$ΔΓ^2 = ΑΓ^2 - ΑΔ^2 \Leftrightarrow$

$ΔΓ^2 = 4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow$

$ΔΓ^2 = 16 - \frac{144}{25} \Leftrightarrow ΔΓ^2 = \frac{400-144}{25}$

$\Leftrightarrow ΔΓ^2 = \frac{256}{25} \Leftrightarrow \boxed{ΔΓ = \frac{16}{5}}$

β) Είναι $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ \Leftrightarrow ΔΒ = \frac{ΑΔ^2}{ΔΓ} \Leftrightarrow ΔΒ = \frac{\left(\frac{12}{5}\right)^2}{\frac{16}{5}} \Leftrightarrow$

$ΔΒ = \frac{\frac{144}{25}}{\frac{16}{5}} \Leftrightarrow \boxed{ΔΒ = \frac{9}{5}}$

γ) Έχουμε $ΒΓ = ΔΒ + ΔΓ = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$

οπότε $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΑΔ \Leftrightarrow (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12}{5} \Leftrightarrow (ΑΒΓ) = 6$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $AB=6$, $B\Gamma=9$ και $\hat{B}=60^{\circ}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma=3\sqrt{7}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την προβολή της ΑΒ πάνω στη ΒΓ.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Με εφαρμογή του νόμου των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2AB\cdot B\Gamma\cdot \sigma\upsilon\nu B \Leftrightarrow$

$A\Gamma^2 = 6^2 + 9^2 - 2\cdot 6\cdot 9\cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 36+81-2\cdot 54\cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$A\Gamma^2 = 63 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 9\cdot 7 \Leftrightarrow \boxed{A\Gamma = 3\sqrt{7}}$

β) Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι η $B\Gamma=9$ οπότε έχουμε: $B\Gamma^2=81$ και $AB^2+A\Gamma^2 = 6^2+(3\sqrt{7})^2 \Leftrightarrow$ $AB^2+A\Gamma^2 = 36+63 = 99$ άρα $B\Gamma^2 < AB^2+A\Gamma^2$ $(81<99)$ που σημαίνει ότι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου η $\hat{A}$ είναι οξεία, επομένως το τρίγωνο είναι οξυγώνιο

γ) Από το Θεώρημα της οξείας γωνίας έχουμε:

$A\Gamma^2 = AB^2+B\Gamma^2 - 2B\Gamma\cdot \pi\rho o\beta_{B\Gamma}^{AB} \Leftrightarrow 2B\Gamma\cdot \pi\rho o\beta_{B\Gamma}^{AB} = AB^2+B\Gamma^2-A\Gamma^2$

$\Leftrightarrow 2\cdot 9\cdot \pi\rho o\beta_{B\Gamma}^{AB} = 36+81-63 \Leftrightarrow 18\cdot \pi\rho o\beta_{B\Gamma}^{AB} = 54$ άρα

$\boxed{\pi\rho o\beta_{B\Gamma}^{AB} = 3}$

ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ.

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και σκαληνό, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

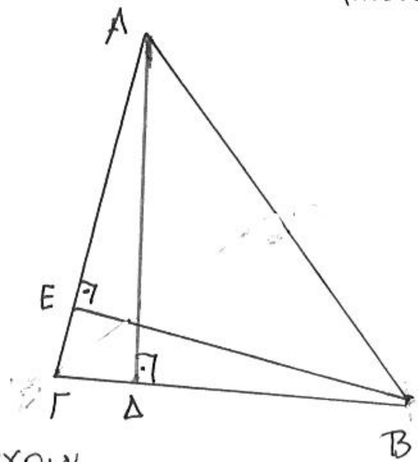
ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ δεν μπορεί να είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

Λύση



α) i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια διότι έχουν: $\hat{Γ}$ κοινή και $\hat{Δ}=\hat{Ε}=90^\circ$.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ έχουν $\hat{Δ}=\hat{Ε}=90^\circ$ αν ήταν όμοια θα είχαν και $\hat{Α}=Δ\hat{Α}Β$ (αδύνατο) ή $\hat{Α}=\hat{Β}$ επίσης αδύνατο αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι σκαληνό

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές στο Γ τότε $\hat{Α}=\hat{Β}$ οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ θα είναι όμοια.

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.

α) Αν το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

i. Όταν η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στο χορδή ΓΔ, τότε $AM \cdot AB = A\Gamma^2$

(Μονάδες 8)

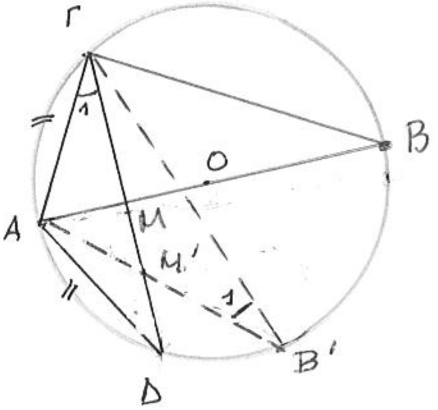
ii. Όταν η χορδή ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, ισχύει η σχέση $AM \cdot AB = A\Gamma^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε σημείο Μ ισχύει ότι $AM \cdot AB = A\Gamma^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

(Μονάδες 8)

Λύση



α) i) Επειδή Α το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ θα είναι ΑΓ = ΑΔ οπότε η κάθετη ΑΜ στη χορδή ΓΔ θα διέρχεται από το κέντρο Ο, επομένως η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου άρα το τρίγωνο ΓΑΒ θα είναι ορθογώνιο στο Γ, οπότε $\Gamma A^2 = AM \cdot AB$

ii) Έστω η ΑΜ δεν είναι κάθετη στην ΑΒ για παράδειγμα η ΑΜ' τότε εξετάζουμε αν ισχύει $AM' \cdot AB' = A\Gamma^2 \Leftrightarrow \frac{AM'}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB'}$

Αρκεί $\overset{\triangle}{AM'\Gamma} \approx \overset{\triangle}{A\Gamma B'}$ που ισχύει αφού $\Gamma\hat{A}B'$: κοινή και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}'_1$ (ως εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα)

Επομένως η παραπάνω σχέση ισχύει

β) Έστω $AM \cdot AB = A\Gamma^2 \Leftrightarrow \frac{AM}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB}$ άρα $\overset{\triangle}{AM\Gamma} \approx \overset{\triangle}{A\Gamma B}$ οπότε θα έχουν $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B} \Leftrightarrow \overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{A\Gamma}$ που σημαίνει ότι το Α θα είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

18994

ΘΕΜΑ 4

Στην πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $BE=\frac{1}{3}AB$ και στην πλευρά ΔΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $ΔZ=\frac{1}{3}ΔΓ$. Αν η διαγώνιος ΑΓ τέμνει τις ΔΕ και ΒΖ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

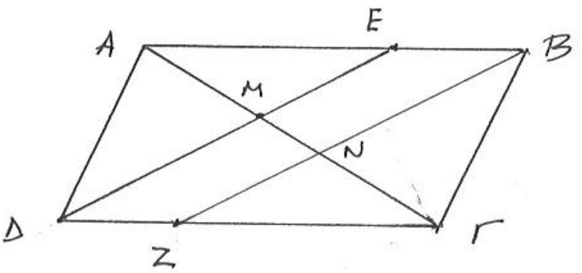
α) ΑΜ=ΓΝ=2ΜΝ

(Μονάδες 13)

β) $MN=\frac{1}{5}AΓ$

(Μονάδες 12)

Λύση

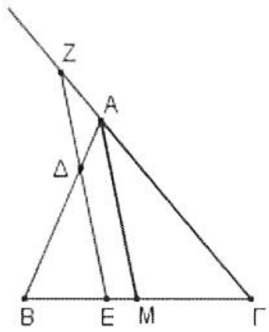


α) Επειδή $EB=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}ΔΓ=ΔZ$ και $EB//ΔZ$, το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $EΔ//BZ$. Έχουμε $ME//BN$ άρα από το Θεώρημα Θαλή είναι
$\frac{AM}{MN}=\frac{AE}{EB}=2$ (αφού $AE=\frac{2}{3}AB=2EB$)
ή $AM=2MN$, ομοίως $\frac{ΓN}{NM}=\frac{ΓZ}{ZΔ}=2$ ($NZ//MΔ$)
άρα $ΓN=2MN$

β) Έχουμε $AΓ=AM+MN+NΓ$ και από το α) $AM=2MN$, $ΓN=2MN$ επομένως $AΓ=2MN+MN+2MN$ ή $AΓ=5MN$ οπότε $MN=\frac{1}{5}AΓ$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{ΔΕ}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{ΑΒ}$

ii. $\frac{ΕΖ}{\dots} = \frac{\dots}{ΓΜ} = \frac{\dots}{\dots}$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ΔΕ+ΕΖ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Επειδή ΔΕ//ΑΜ τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΑΜ είναι όμοια (αφού $\hat{Β}$: κοινή και $Β\hat{Δ}Ε = Β\hat{Α}Μ$ ως εντός εκτός και επί τα αυτά) ομοίως και τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΓΕΖ είναι όμοια ($\hat{Γ}$: κοινή, $Ζ\hat{Ε}Γ = Α\hat{Μ}Γ$) επομένως έχουμε τις αναλογίες:

i. $\frac{ΔΕ}{ΑΜ} = \frac{ΒΕ}{ΒΜ} = \frac{ΒΔ}{ΑΒ}$

ii. $\frac{ΕΖ}{ΑΜ} = \frac{ΕΓ}{ΓΜ} = \frac{ΖΓ}{ΑΓ}$

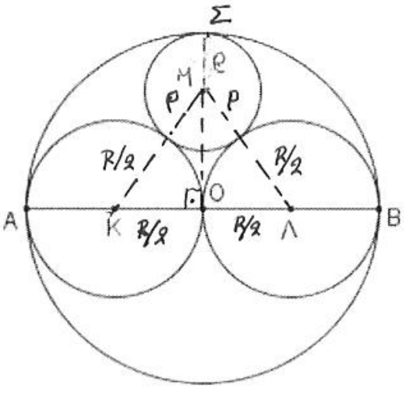
β) Από τις i) ii) έχουμε:

$\frac{ΔΕ}{ΑΜ} = \frac{ΒΕ}{ΒΜ}$ και $\frac{ΕΖ}{ΑΜ} = \frac{ΕΓ}{ΓΜ}$ (όπου ΒΜ = ΓΜ). Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ} = \frac{ΒΕ+ΕΓ}{ΒΜ} \Leftrightarrow \frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ} = \frac{ΒΓ}{ΒΜ} \Leftrightarrow$ $\frac{ΔΕ+ΕΖ}{ΑΜ} = \frac{2ΒΜ}{ΒΜ}$ άρα ΔΕ+ΕΖ = 2ΑΜ δηλαδή το άθροισμα ΔΕ+ΕΖ είναι ανεξάρτητο από τη θέση του Ε στο ΒΜ.

19006

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία διάμετρός του AB. Με διαμέτρους τα τμήματα OA και OB γράφουμε τους κύκλους κέντρων K και Λ αντίστοιχα. Ένας τέταρτος κύκλος κέντρου M και ακτίνας ρ εφάπτεται εξωτερικά των κύκλων κέντρων K και Λ και εσωτερικά του κύκλου κέντρου O.



α) Να εκφράσετε τις διακέντρους KM, ΛM και OM των αντιστοίχων κύκλων ως συνάρτηση των ακτίνων τους, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{R}{3}$.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Έχουμε $KM = \frac{R}{2} + \rho = M\Lambda$. Το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές άρα η διάμεσος ΜΟ θα είναι και ύψος οπότε, με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΜΚΟ είναι:

$$MO^2 = MK^2 - KO^2 = \left(\frac{R}{2}+\rho\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} + 2\frac{R}{2}\cdot\rho + \rho^2 - \frac{R^2}{4} = R\cdot\rho + \rho^2$$

άρα $MO = \sqrt{R\rho + \rho^2}$ (1)

β) Παρατηρούμε ότι $MO = O\Sigma - M\Sigma = R - \rho$ (2)

οπότε από (1),(2) προκύπτει

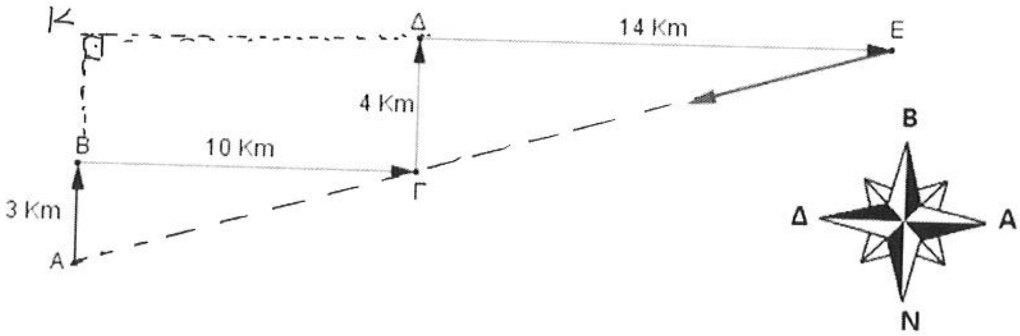
$$R - \rho = \sqrt{R\rho + \rho^2} \Leftrightarrow (R-\rho)^2 = R\rho + \rho^2 \Leftrightarrow R^2 - 2R\rho + \rho^2 = R\rho + \rho^2 \Leftrightarrow$$

$$3R\rho = R^2 \Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{R}{3}}$$

19009

ΘΕΜΑ 4

Ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια προχωράει 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε.



α) Αν από το σημείο Ε επιστρέψει στο σημείο Α από το οποίο ξεκίνησε, κινούμενο ευθύγραμμα, να βρείτε την απόσταση ΑΕ που θα διανύσει.

(Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Κατασκευάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΕ ($\hat{K}=90^\circ$)

οπότε $AE^2=KA^2+KE^2 \Leftrightarrow AE^2=7^2+24^2 \Leftrightarrow AE^2=625 \Leftrightarrow \boxed{AE=25}$

β) Είναι $ΑΓ^2=ΑΒ^2+ΒΓ^2$ (Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΑΓ)

ή $ΑΓ^2=3^2+10^2=109 \Leftrightarrow ΑΓ=\sqrt{109}$ (1)

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΕ έχουμε

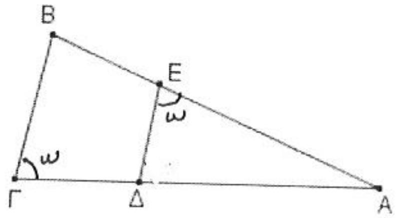
$ΓΕ^2=ΔΓ^2+ΔΕ^2 \Leftrightarrow ΓΕ^2=4^2+14^2 \Leftrightarrow ΓΕ^2=212 \Leftrightarrow ΓΕ=\sqrt{212}$

από (1),(2) είναι $ΑΓ+ΓΕ=\sqrt{109}+\sqrt{212}\neq 25=ΑΕ$

Άρα τα σημεία Α, Γ και Ε δεν είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν: $AE=\frac{2}{3}A\Gamma$ και $A\Delta=\frac{2}{3}AB$.



α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{E}\Delta = A\hat{\Gamma}B$.

(Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν ισχύει $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{E\Delta}{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν το τμήμα ΒΓ είναι παράλληλο στο τμήμα ΔΕ.

(Μονάδες 8)

Να αιτιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Λύση

α) Είναι $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{2}{3}$ και $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{2}{3}$ άρα $\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{A\Delta}{AB}$ και $\hat{A}$: κοινή

Επομένως $\overset{\triangle}{AE\Delta} \approx \overset{\triangle}{A\Gamma B}$ που σημαίνει ότι $A\hat{E}\Delta = A\hat{\Gamma}B$

β) Αφού $\overset{\triangle}{AE\Delta} \approx \overset{\triangle}{A\Gamma B}$ οπότε $\frac{E\Delta}{B\Gamma}=\frac{AE}{A\Gamma}$

γ) Αν ήταν $\Delta E \parallel B\Gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = A\hat{E}\Delta = \omega = \hat{\Gamma}$
(εντός εκτός και επί τα αυτά)

που σημαίνει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ θα έπρεπε να είναι ισοσκελές

άτοπο, αφού είναι σκαληνό. Άρα $\Delta E \nparallel B\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) τέτοιο ώστε να ισχύει $2\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$. Αν η προέκταση της διαμέσου του ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ρ, να αποδείξετε ότι :

α) $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

(Μονάδες 8)

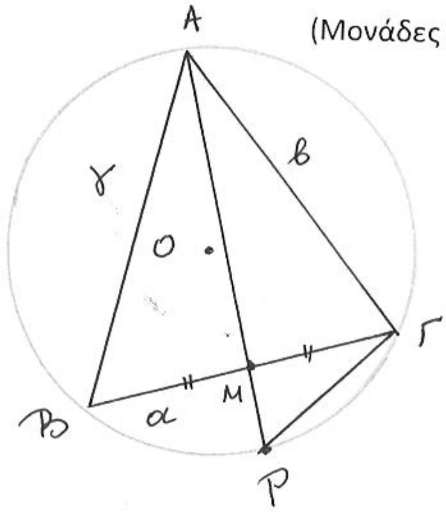
β) $ΜΡ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$

(Μονάδες 8)

γ) (ΑΒΓ)=6 (ΜΡΓ)

(Μονάδες 9)

Λύση



α) Από τον τύπο της διαμέσου ΑΜ έχουμε $\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}$ όμως $2\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ οπότε

$\mu_\alpha^2 = \frac{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}{4} = \frac{2\cdot 2\alpha^2-\alpha^2}{4} =$

$= \frac{3\alpha^2}{4}$ άρα $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

β) Από το θεώρημα των τεμνόμενων χορδών έχουμε:

$ΑΜ\cdot ΜΡ = ΒΜ\cdot ΜΓ \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot ΜΡ = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow ΜΡ = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow ΜΡ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$

γ) Επειδή ΑΜ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ θα έχουμε:

$(ΑΜΓ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓ)$ (1)

Τα τρίγωνα ΑΜΓ και ΜΡΓ έχουν κοινό ύψος οπότε

$\frac{(ΑΜΓ)}{(ΜΡΓ)} = \frac{ΑΜ}{ΜΡ} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{6}} = \frac{6}{2} = 3$ (από τα α) και β))

άρα $(ΑΜΓ) = 3(ΜΡΓ)$ (2)

Από (1),(2) προκύπτει ότι $(ΑΒΓ) = 6(ΜΡΓ)$

ΘΕΜΑ 4

Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο της διαγωνίου ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma$

(Μονάδες 7)

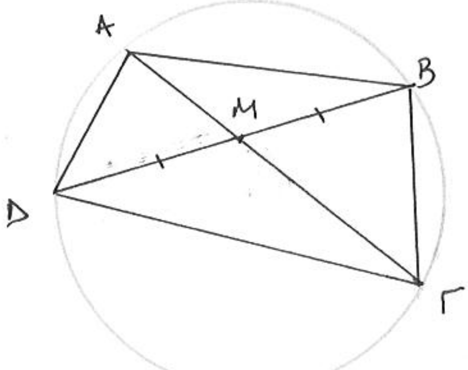
β) $AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma$

(Μονάδες 9)

γ) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2A\Gamma^2$

(Μονάδες 9)

Λύση



α) Από το θεώρημα των τεμνόμενων χορδών έχουμε:

$MB \cdot M\Delta = MA \cdot M\Gamma \Leftrightarrow$

$\frac{B\Delta}{2} \cdot \frac{B\Delta}{2} = MA \cdot M\Gamma \Leftrightarrow \Delta B^2 = 4MA \cdot M\Gamma$

β) Από το 1ο θεώρημα της διαμέσου έχουμε:

$AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + \frac{B\Delta^2}{2}$ και από το α) προκύπτει

$AB^2 + A\Delta^2 = 2AM^2 + \frac{4MA \cdot M\Gamma}{2} = 2AM^2 + 2AM \cdot M\Gamma = 2AM(AM + M\Gamma) = 2AM \cdot A\Gamma$

γ) Σύμφωνα με το ερώτημα β) για τη διάμεσο ΓΜ του τριγώνου ΓΒΔ έχουμε $B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 = 2\Gamma M \cdot A\Gamma$. Επίσης από το β) είναι $AB^2 + A\Delta^2 = 2AM \cdot A\Gamma$ και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + A\Delta^2 = 2\Gamma M \cdot A\Gamma + 2AM \cdot A\Gamma = 2A\Gamma(\Gamma M + AM) = 2A\Gamma \cdot A\Gamma = 2A\Gamma^2$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\frac{AΔ}{AB}=\frac{AE}{AΓ}=\frac{1}{3}$. Από το σημείο Α φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η ευθεία (ε) τέμνει τις προεκτάσεις των ΒΕ και ΓΔ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ//ΓΒ

(Μονάδες 5)

β) $ZE=\frac{1}{2}EB$.

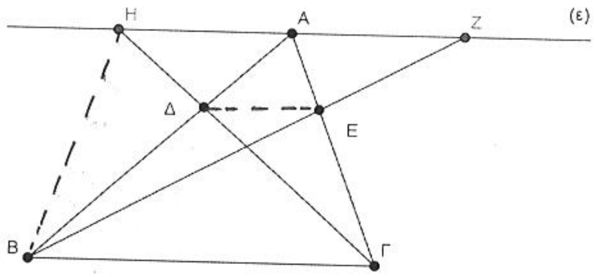
(Μονάδες 7)

γ) $AZ=\frac{1}{2}BΓ$.

(Μονάδες 7)

δ) (ΒΗΖ) =2 (ΑΒΖ)

(Μονάδες 6)



Λύση

α) Επειδή $\frac{AΔ}{AB}=\frac{AE}{AΓ}=\frac{1}{3}$ από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι ΔΕ//ΒΓ

β) Είναι ΑΖ//ΔΕ οπότε έχουμε $\frac{ZE}{EB}=\frac{AΔ}{ΔB}=\frac{1}{2}$ αφού $AΔ=\frac{1}{3}AB$ δηλαδή $AΔ=\frac{1}{2}ΔB$
Επομένως $ZE=\frac{1}{2}EB$

γ) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΕΒΓ είναι όμοια (ΑΖ//ΒΓ) άρα $\frac{AZ}{BΓ}=\frac{ZE}{EB}=\frac{1}{2}$ (από β)) δηλαδή $AZ=\frac{1}{2}BΓ$

δ) Αφού ΗΑ//ΒΓ είναι $\frac{HA}{BΓ}=\frac{AΔ}{ΔB}=\frac{1}{2}$ δηλαδή $HA=\frac{1}{2}BΓ$ οπότε από γ) έχουμε ΗΑ = ΑΖ άρα $\frac{(BHZ)}{(ABZ)}=\frac{HZ}{AZ}=2$ (τα τρίγωνα ΒΗΖ και ΑΒΖ έχουν κοινό ύψος)
Επομένως (ΒΗΖ) = 2(ΑΒΖ).

19029

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και σημείο Μ της πλευράς του ΑΔ ώστε $\frac{AM}{AΔ}=\frac{1}{3}$.
Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου, η οποία τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Κ και Ν αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AK}{AΓ}=\frac{1}{3}$

(Μονάδες 6)

β) $\frac{KN}{AB}=\frac{2}{3}$

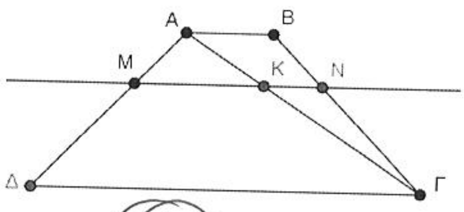
(Μονάδες 6)

γ) $MN=\frac{1}{3}ΓΔ+\frac{2}{3}AB$

(Μονάδες 6)

δ) Ο ισχυρισμός «τα τραπέζια ΑΒΝΜ και ΑΒΓΔ είναι όμοια» είναι αληθής ή ψευδής; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Επειδή ΜΚ//ΔΓ έχουμε $\frac{AK}{AΓ}=\frac{AM}{AΔ}=\frac{1}{3}$ (Θεώρημα Θαλή)

β) Αφού ΚΝ//ΑΒ τα τρίγωνα ΓΚΝ και ΓΑΒ είναι όμοια οπότε $\frac{KN}{AB}=\frac{ΓK}{ΓA}$ (1) από το α) είναι $\frac{AK}{ΓA}=\frac{1}{3}$ οπότε $\frac{ΓK}{ΓA}=\frac{2}{3}$ (2)
άρα από (1),(2) έχουμε $\frac{KN}{AB}=\frac{2}{3}$

γ) Είναι $MN=MK+KN$ όπου $\frac{MK}{ΔΓ}=\frac{AK}{AΓ}=\frac{1}{3}$ (λόγω ΜΚ//ΔΓ) άρα $MK=\frac{1}{3}ΔΓ$ και από το β) $KN=\frac{2}{3}AB$
Επομένως $MN=\frac{1}{3}ΔΓ+\frac{2}{3}AB$

δ) Από το γ) παρατηρούμε ότι ο λόγος $\frac{MN}{ΓΔ}>\frac{1}{3}$ ενώ $\frac{AM}{AΔ}=\frac{1}{3}$
άρα $\frac{AM}{AΔ}\neq\frac{MN}{ΔΓ}$ που σημαίνει ότι τα τραπέζια ΑΒΝΜ και ΑΒΓΔ δεν είναι όμοια.

19032

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι (Ο, α) και (Κ, β) με α>β , οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο Μ. Φέρνουμε το κοινό εφαπτόμενο τμήμα ΑΒ με Α ,Β σημεία των κύκλων (Ο, α) και (Κ, β) αντίστοιχα. Από το Μ Θεωρούμε την κάθετη στο ΑΒ, η οποία τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΚ και ΑΒ στα σημεία Λ και Ν αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΛ = \frac{αβ}{α+β}$

(Μονάδες 8)

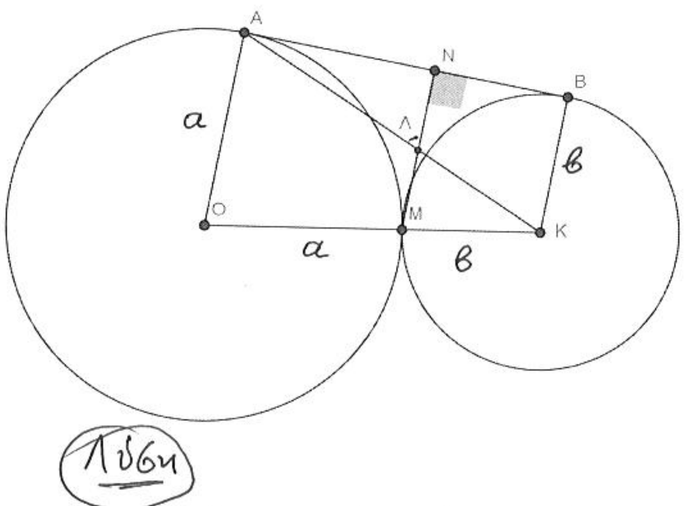
β) $ΛΝ = \frac{αβ}{α+β}$

(Μονάδες 8)

γ) Αν E_1 και E_2 είναι τα εμβαδά των κύκλων (Ο, α) και (Κ, β) αντίστοιχα, τότε

$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}\right)^2$.

(Μονάδες 9)



Λύση

α) Είναι $\hat{A}=\hat{B}=\hat{N}=90^\circ$ οπότε ΜΝ//ΟΑ//ΚΒ άρα έχουμε
$\frac{ΜΛ}{ΟΑ}=\frac{ΚΜ}{ΚΟ}$ ή $\frac{ΜΛ}{α}=\frac{β}{α+β} \Leftrightarrow \boxed{ΜΛ=\frac{αβ}{α+β}}$

β) Ομοίως ΛΝ//ΚΒ άρα $\frac{ΛΝ}{ΚΒ}=\frac{ΑΝ}{ΑΒ}=\frac{ΟΜ}{ΟΚ}$ (Θ. Θαλή) ή $\frac{ΛΝ}{β}=\frac{α}{α+β} \Leftrightarrow$ $\boxed{ΛΝ=\frac{αβ}{α+β}}$

γ) Είναι $\frac{E_1}{E_2}=\frac{πα^2}{πβ^2}=\left(\frac{α}{β}\right)^2$ (1). Αφού $Α\hat{Λ}Ν=Μ\hat{Λ}Κ$ (κατακορυφήν) θα έχουμε $\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}=\frac{ΑΛ\cdot ΛΝ}{ΚΛ\cdot ΚΜ}=\frac{ΑΛ}{ΛΚ}=\frac{α}{β}$ (Είναι ΛΝ=ΚΜ από α) και β))
Επομένως $\left(\frac{(ΑΛΝ)}{(ΚΜΛ)}\right)^2=\left(\frac{α}{β}\right)^2$ (2) από (1),(2) έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Μ, Λ και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $AM=\frac{1}{2}AB$, $A\Lambda=\frac{2}{3}A\Gamma$ και $BZ=\frac{1}{3}B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $(AM\Lambda)=\frac{1}{3}(AB\Gamma)$.

(Μονάδες 7)

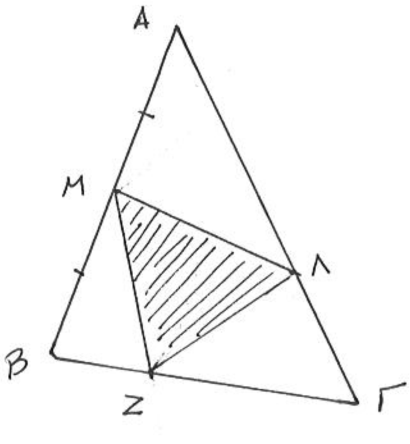
β) Να αποδείξετε ότι $\frac{(MZ\Lambda)}{(AB\Gamma)}=\frac{5}{18}$.

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{(AMZ\Lambda)}{(AB\Gamma)}$.

(Μονάδες 6)

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΑΒΓ έχουν τη $\hat{A}$ κοινή άρα,

$$\frac{(AM\Lambda)}{(AB\Gamma)}=\frac{AM\cdot A\Lambda}{AB\cdot A\Gamma}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot\frac{2}{3}A\Gamma}{AB\cdot A\Gamma}=\frac{1}{3}$$

Επομένως $(AM\Lambda)=\frac{1}{3}(AB\Gamma)$ (1)

β) Είναι $\frac{(BMZ)}{(AB\Gamma)}=\frac{BM\cdot BZ}{BA\cdot B\Gamma}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{3}B\Gamma}{AB\cdot B\Gamma}=\frac{1}{6}$ (Τα $\overset{\triangle}{BMZ}$, $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουν κοινή τη γωνία $\hat{B}$)

άρα $(BMZ)=\frac{1}{6}(AB\Gamma)$ (2)

Ομοίως $\frac{(\Gamma Z\Lambda)}{(\Gamma BA)}=\frac{\Gamma\Lambda\cdot\Gamma Z}{\Gamma A\cdot\Gamma B}=\frac{\frac{1}{3}A\Gamma\cdot\frac{2}{3}\Gamma B}{A\Gamma\cdot\Gamma B}=\frac{2}{9}$ άρα $(\Gamma Z\Lambda)=\frac{2}{9}(AB\Gamma)$ (3)

Από (1),(2),(3) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $(AM\Lambda)+(BMZ)+(\Gamma Z\Lambda)=$
$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\right)(AB\Gamma)=\left(\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{4}{18}\right)(AB\Gamma)=\frac{13}{18}(AB\Gamma)$ οπότε
$(MZ\Lambda)=\frac{5}{18}(AB\Gamma)$.

γ) Έχουμε $(AMZ\Lambda)=(AM\Lambda)+(MZ\Lambda)=\frac{1}{3}(AB\Gamma)+\frac{5}{18}(AB\Gamma)=\frac{11}{18}(AB\Gamma)$

Επομένως $\frac{(AMZ\Lambda)}{(AB\Gamma)}=\frac{11}{18}$.

19039

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A} = 36^\circ$ και η διχοτόμος του ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

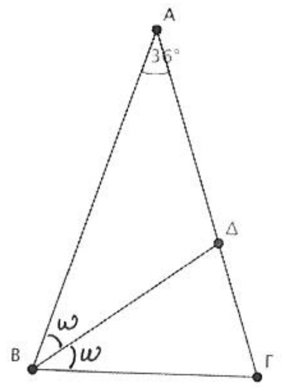
(Μονάδες 6)

ii) $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

(Μονάδες 9)

β) Αν θεωρήσουμε το ΑΓ ως μοναδιαίο τμήμα (ΑΓ = 1), να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ και το λόγο $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 10)



Λύση

α) i) Είναι $\hat{A} = 36^\circ$ οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$ οπότε $\omega = 36^\circ$.
Άρα $\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma} \approx \overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

ii) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΔΓ και ΑΒΓ έχουμε
$\frac{\Delta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \Leftrightarrow \Delta\Gamma \cdot A\Gamma = B\Gamma^2$ (1) όμως $B\Gamma = B\Delta$ ($\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$: ισοσκελές) και $B\Delta = A\Delta$ (αφού $\omega = 36$) οπότε $B\Gamma = A\Delta$ (2)
Από (1), (2) προκύπτει ότι $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

β) Θέτουμε $A\Delta = x$ οπότε από την ισότητα $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$ έχουμε
$x^2 = 1 \cdot (1 - x) \Leftrightarrow x^2 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$
άρα $A\Delta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Από το ii) προκύπτει ότι $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}$

άρα $\boxed{\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$