

**ΑΛΥΤΕΣ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

Μελέτησες επαρκώς τις λυμένες;



**Α' Ομάδα**

1. Να αποδείξετε ότι:  
α)  $\eta\mu 137^\circ = \eta\mu 43^\circ$ , β)  $\sigma\upsilon\nu 95^\circ = -\sigma\upsilon\nu 85^\circ$ , γ)  $\epsilon\phi 100^\circ = -\epsilon\phi 80^\circ$ .
2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:  
α)  $150^\circ$ , β)  $103^\circ$ , γ)  $175^\circ$ .
3. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:  
 $A = 2 \cdot \eta\mu 23^\circ + \sigma\upsilon\nu 32^\circ + \sigma\upsilon\nu 148^\circ - \eta\mu 157^\circ$ ,  
 $B = \epsilon\phi 78^\circ + \sigma\upsilon\nu 121^\circ + \sigma\upsilon\nu 59^\circ + \epsilon\phi 102^\circ$ ,  
 $\Gamma = \eta\mu 55^\circ + \epsilon\phi 135^\circ \cdot \eta\mu 125^\circ$ .
4. Να αποδείξετε ότι: α)  $\sigma\upsilon\nu^2 135^\circ + \eta\mu 150^\circ = 1$ , β)  $\sigma\upsilon\nu^2 120^\circ - \epsilon\phi^2 150^\circ = -\frac{1}{12}$ .
5. Αν  $0^\circ \leq x < 90^\circ$ , να λυθούν οι εξισώσεις:  
α)  $2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0$ , β)  $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ , γ)  $\epsilon\phi x - 1 = 0$ , χωρίς τη βοήθεια τριγωνομετρικών πινάκων.
6. Αν  $0^\circ \leq x < 90^\circ$ , να λυθούν οι εξισώσεις:  
α)  $-5\eta\mu x + 4 = 0$ , β)  $8\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$ , γ)  $5\epsilon\phi x - 8 = 0$ .
7. Αν  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ , να λυθούν οι εξισώσεις:  
α)  $5\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$ , β)  $3\eta\mu x - 1 = 0$ , γ)  $6\epsilon\phi x - 21 = 0$ .
8. Αν  $90^\circ < x \leq 180^\circ$ , να λυθούν οι εξισώσεις:  
α)  $10\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ , β)  $8\eta\mu x - 7 = 0$ , γ)  $10\epsilon\phi x + 6 = 0$ .
9. Αν  $90^\circ < x \leq 180^\circ$ , να λυθούν οι εξισώσεις:  
α)  $4\sigma\upsilon\nu^2 x + 3 = 0$ , β)  $2\eta\mu^2 x - 1 = 0$ , γ)  $\epsilon\phi^2 x - 3 = 0$ .
10. Για τις τιμές της γωνίας  $\omega$  που ορίζονται οι παραστάσεις, να κάνετε τις πράξεις:  $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu\omega \cdot \epsilon\phi\omega}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\phi(180^\circ - \omega)}$ ,  
 $B = \frac{\epsilon\phi(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\phi\omega}$ .
11. Να αποδείξετε ότι:  $\eta\mu(90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = 0$ .

- 12.** Δίνεται ο ρόμβος ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι στο ρόμβο υπάρχουν γωνίες με τα ίδια ημίτονα και αντίθετα συνημίτονα.
- 13.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 8 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ, έτσι ώστε  $ΒΔ = 3$  cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ΑΔΒ, ΑΔΓ.

### Β' Ομάδα

- 14.** Αν  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ , να λυθεί η εξίσωση  $(3\sigma\upsilon\nu x - 2)^2 = 4$ .
- 15.** Να αποδείξετε τις ακόλουθες σχέσεις:  
**α)**  $\eta\mu(27^\circ - \omega) = \eta\mu(153^\circ + \omega)$ , **β)**  $\eta\mu(45^\circ - \omega) - \eta\mu(135^\circ + \omega) = 0$ .
- 16.** Αν  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ , να βρεθεί η γωνία x που ικανοποιεί την εξίσωση  $\eta\mu(x + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(2x + 15^\circ)$ .
- 17.** Αν  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ , να λυθεί η εξίσωση  $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x$ .
- 18.** Αν  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ , να λυθεί η εξίσωση  $4\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x = 0$ .
- 19.** Αν  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ , να λυθεί η εξίσωση  $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ .
- 20.** Αν  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ , να λυθεί η εξίσωση  $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x - 2 = 0$ .
- 21.** Να αποδείξετε ότι: **α)**  $\eta\mu(90^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ , **β)**  $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$ .



## ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**Απαντήσεις αντιστοίχισης:** 1. Α, 2. Ζ, 3. Γ, 4. ΣΤ, 5. Δ.

1. Παραπληρωματικές γωνίες.
2. α)  $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma\upsilon\nu 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\epsilon\phi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  
β)  $\eta\mu 103^\circ = \eta\mu 77^\circ \approx 0,974$ ,  $\sigma\upsilon\nu 103^\circ = -\sigma\upsilon\nu 77^\circ \approx -0,225$ ,  $\epsilon\phi 103^\circ = -\epsilon\phi 77^\circ \approx -4,331$ ,  
γ)  $\eta\mu 175^\circ = \eta\mu 5^\circ \approx 0,087$ ,  $\sigma\upsilon\nu 175^\circ = -\sigma\upsilon\nu 5^\circ \approx -0,996$ ,  $\epsilon\phi 175^\circ = -\epsilon\phi 5^\circ \approx -0,087$ .
3.  $A = \eta\mu 23^\circ \approx 0,391$ ,  $B = 0$ ,  $\Gamma = 0$ .
4. Πράξεις.
5. α)  $x = 60^\circ$ , β)  $x = 60^\circ$ , γ)  $x = 45^\circ$ .
6. α)  $x \approx 53^\circ$ , β)  $x \approx 68^\circ$ , γ)  $x \approx 58^\circ$ .
7. α)  $x \approx 114^\circ$ , β)  $x \approx 19^\circ$  ή  $x \approx 161^\circ$ , γ)  $x \approx 74^\circ$ .
8. α)  $x \approx 107^\circ$ , β)  $x \approx 119^\circ$ , γ)  $x \approx 149^\circ$ .
9. α) Αδύνατη, β)  $x = 135^\circ$ , γ)  $x = 120^\circ$ .
10.  $A = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ,  $B = \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^3\omega}$ .
11. Πράξεις.
12. Παραπληρωματικές γωνίες.  $\hat{A} = \hat{B}$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - \hat{B}$ .
13. Φέρνουμε το ύψος ΑΕ, οπότε  $\Delta E = 1$  cm,  $A E = 4 \cdot \sqrt{3}$  cm,  $A \Delta = 7$  cm,  
 $\eta\mu A \hat{\Delta} B = \eta\mu A \hat{\Delta} \Gamma = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ,  $\sigma\upsilon\nu A \hat{\Delta} \Gamma = \frac{1}{7}$ ,  $\sigma\upsilon\nu A \hat{\Delta} B = -\frac{1}{7}$ ,  $\epsilon\phi A \hat{\Delta} \Gamma = 4\sqrt{3}$  και  $\epsilon\phi A \hat{\Delta} B = -4\sqrt{3}$ .
14.  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{3}$  (αδύνατη) ή  $\sigma\upsilon\nu x = 0$ , άρα  $x = 90^\circ$ .
15. Παραπληρωματικές γωνίες.
16.  $\eta\mu(x + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(2x + 15^\circ)$  ή  $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - x - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(2x + 15^\circ)$  ή  $90^\circ - x - 30^\circ = 2x + 15^\circ$ ,  
οπότε  $x = 15^\circ$ .
17.  $x = 135^\circ$ .
18.  $4\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x = 0$  ή  $2\sigma\upsilon\nu x \cdot (2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$ , άρα  $\sigma\upsilon\nu x = 0$  ή  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ , οπότε  $x = 90^\circ$  ή  $x = 120^\circ$ .
19. Τριώνυμο ως προς  $\sigma\upsilon\nu x$ , οπότε  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{-2 \pm 4}{6}$ , άρα  $\sigma\upsilon\nu x = -1$  ή  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$ , δηλαδή  $x = 180^\circ$  ή  $x \approx 71^\circ$ .
20. Τριώνυμο ως προς  $\eta\mu x$ , οπότε  $\eta\mu x = \frac{3 \pm 5}{4}$ , άρα  $\eta\mu x = 2$  (αδύνατη) ή  $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$  (αδύνατη).
21. α)  $\eta\mu(90^\circ + \omega) = \eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ , β)  $\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = -\eta\mu\omega$ .